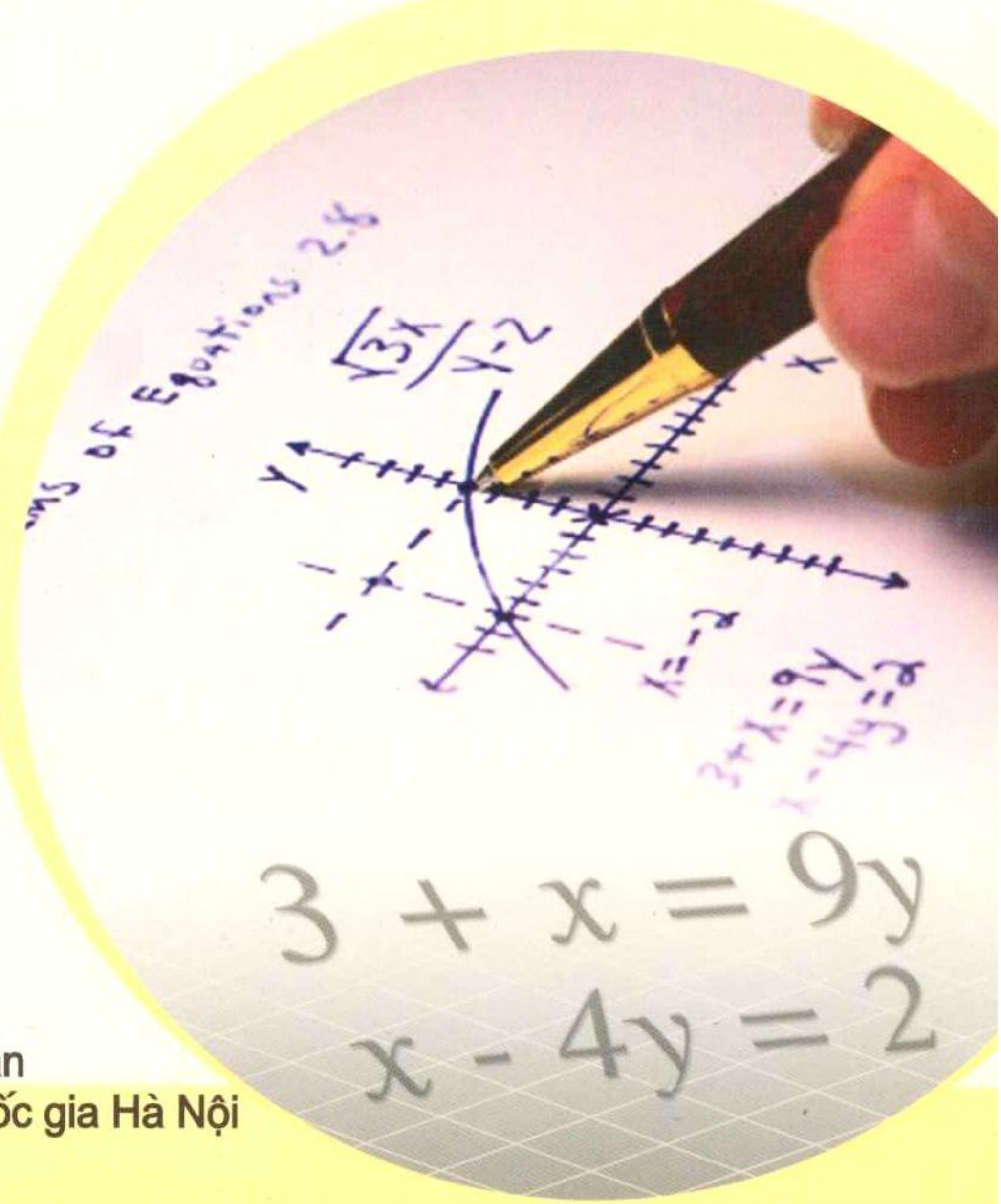
NGUYỄN VĂN CHI
NGUYỄN NGỌC KHOA

Phân loại & Phương pháp giải
CÁC DẠNG TOÁN
ĐẠI SỐ 10

CƠ BẢN & NÂNG CAO


ms of Equations 2.8
√3x
y-2
x
y
x=-2
3+x=9y
x-4y=2
3 + x = 9y
x - 4y = 2

Nhà xuất bản
Đại học Quốc gia Hà Nội

NGUYỄN VĂN CHI - NGUYỄN NGỌC KHOA

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN

ĐẠI SỐ

10

Biên soạn theo chương trình của Bộ Giáo dục & Đào tạo

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI GIỚI THIỆU

Nhằm góp phần giúp các em học sinh Trung học phổ thông có tài liệu luyện tập môn Toán, nắm được phương pháp giải các dạng toán (Đại số và Hình học) lớp 10, chúng tôi biên soạn cuốn sách ***Phân loại và phương pháp giải các dạng toán Đại số 10*** theo chương trình mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Tập sách gồm các nội dung :

- Phương pháp giải từng dạng toán Đại số.
- Bài tập vận dụng (cơ bản và nâng cao).
- Bài giải.

Với các nội dung trình bày trên, chúng tôi hi vọng sẽ giúp các em học sinh nắm vững kiến thức cơ bản và phương pháp giải các dạng toán từ cơ bản đến nâng cao.

Chúc các em chăm ngoan, học giỏi và thành đạt.

Xin cám ơn.

Tác giả

Chương 1. MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP

Dạng 1. MỆNH ĐỀ – MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

A. PHƯƠNG PHÁP

– Dùng định nghĩa mệnh đề :

- Mỗi mệnh đề phải được khẳng định hoặc đúng hoặc sai.
- Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

– Với mỗi giá trị của biến thuộc một tập hợp nào đó, mệnh đề chứa biến trở thành một mệnh đề.

B. BÀI TẬP

Bài 1. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề :

a) Ngày mai bạn có đi học không ?

b) $2006 + 1 = 2008$

c) Số 0 không phải là một số nguyên.

d) Em đã thuộc bài.

Hướng dẫn : Dùng định nghĩa mệnh đề chọn câu đúng.

Bài 2. Khoanh tròn vào chữ đứng trước câu có kết quả sai.

A. Số 29 là một số nguyên tố, là một mệnh đề.

B. Hà Nội là thủ đô của nước Việt Nam, là một mệnh đề.

C. $3x + 5$ là một số nguyên dương, là một mệnh đề.

D. $\sqrt{2006}$ là một số vô tỉ là một mệnh đề.

Hướng dẫn : Tương tự bài 1.

Bài 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề đúng ghi Đ, mệnh đề sai ghi S vào ô trống.

a) Số 0 không phải là một số nguyên dương. ☐

b) Các số nhỏ hơn 0 đều là số nguyên âm. ☐

c) Các số chẵn thì chia hết cho 2. ☐

d) $3 - \sqrt{7} < 0$ ☐

Hướng dẫn : Dùng kiến thức cơ bản để suy luận.

Bài 4. Khẳng định nào sau đây là mệnh đề, mệnh đề chứa biến.

a) Có ba số mà lập phương của chúng bằng chính nó.

b) $x + 5 = 7$

c) $x^2 + x > 0$

d) Tam giác cân có một góc bằng 60° là tam giác đều.

Hướng dẫn : Dùng khái niệm mệnh đề chứa biến để trả lời.

Bài 5. Tìm các giá trị của biến để các mệnh đề chứa biến sau trở thành một mệnh đề đúng.

a) $-x^2 + 5 = 0$ b) $7 - x^2 > 0$.

Hướng dẫn :

a) $$-x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \sqrt{5} = 0 \\ x - \sqrt{5} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

b) $$7 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{7})^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{7} + x)(\sqrt{7} - x) > 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{7} + x > 0 \\ \sqrt{7} - x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{7} + x < 0 \\ \sqrt{7} - x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -\sqrt{7} \\ x < \sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\sqrt{7} \\ x > \sqrt{7} \end{cases} \text{(loại)} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$$

Từ các kết quả trên suy ra các giá trị của biến cần tìm để các mệnh đề chứa biến trở thành một mệnh đề đúng.

Dạng 2. CÁC PHÉP TOÁN VỀ MỆNH ĐỀ

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Phủ định của một mệnh đề

Để phủ định một mệnh đề ta thêm (hoặc bớt) từ "không" hoặc "không phải" vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

Cho mệnh đề A, mệnh đề phủ định của nó là $\overline{A}$. Nếu A đúng thì $\overline{A}$ sai, nếu $\overline{A}$ sai thì A đúng.

2. Mệnh đề kéo theo

- Mệnh đề "Nếu A thì B" được gọi là mệnh đề kéo theo. Kí hiệu $A \Rightarrow B$.
- Mệnh đề $A \Rightarrow B$ chỉ sai khi A đúng và B sai.
- Định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường có dạng $A \Rightarrow B$.

(Với A là giả thiết hay A là điều kiện đủ để có B; B là kết luận của định lí hay B là điều kiện cần để có A).

3. Mệnh đề đảo

Mệnh đề đảo của mệnh đề $A \Rightarrow B$ là $B \Rightarrow A$.

4. Mệnh đề tương đương

Hai mệnh đề A và B gọi là tương đương nếu cả hai mệnh đề $A \Rightarrow B$ và $B \Rightarrow A$ đều đúng.

5. Kí hiệu

$\forall$: "với mọi"

$\exists$: "tồn tại ít nhất một" hay "có ít nhất một".

B. BÀI TẬP

Bài 6. Phát biểu phủ định các mệnh đề sau và xét tính đúng, sai của chúng.

a) A : "Số 1001 là số nguyên tố".

b) B : "14 không chia hết cho 3".

c) C : "Số π là số vô tỉ".

d) D : "$|-2006| \leq 0$".

Hướng dẫn : Dùng khái niệm phủ định của một mệnh đề để trả lời.

Bài 7. Phát biểu phủ định của các mệnh đề sau và xét tính đúng, sai của chúng.

a) M : "$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$"

b) N : "$\sqrt{2007} - \sqrt{2006} = \dfrac{1}{\sqrt{2007} + \sqrt{2006}}$"

c) P : "$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ không phải là một chính phương"

d) Q : "Phương trình $x^2 + 2x + 2 = 0$ vô nghiệm".

Hướng dẫn : Tương tự bài 6.

Bài 8. Cho mệnh đề kéo theo : "Nếu $x = 3$ thì $x^2 = 9$" (1)

a) Mệnh đề này đúng hay sai ?

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên ?

Hướng dẫn : $x = 3 : \begin{cases} x = 3 & \text{Đ} \\ x^2 = 9 & \text{Đ} \end{cases} \Rightarrow$ Mệnh đề (1) đúng.

Bài 9. Cho các mệnh đề kéo theo :

- Nếu a chia hết cho m và b cũng chia hết cho m thì a + b chia hết cho m (a, b, m là các số nguyên; $m \neq 0$).
- Tam giác đều có các đường cao xuất phát từ ba đỉnh bằng nhau.

a) Phát biểu mệnh đề đảo của hai mệnh đề trên.

b) Phát biểu hai mệnh đề trên bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần".

c) Phát biểu hai mệnh đề trên bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện đủ".

Hướng dẫn : Dùng kiến thức về mệnh đề đảo và định lí để trả lời.

Bài 10. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai ? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.

a) $\forall x \in \mathbf{R}, |x| < 2006 \Leftrightarrow x < 2006$

b) $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x < 0$

c) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 > 0$

d) $\exists x \in \mathbf{Q}, x^2 = 11$.

Hướng dẫn : Sử dụng kiến thức về giá trị tuyệt đối, bất phương trình và các kí hiệu với mọi, tồn tại để trả lời.

Bài 11. Mệnh đề đúng ghi Đ, mệnh đề sai ghi S vào ô trống.

a) $\forall x \in \mathbf{R}, |x| = -x$ ☐

b) $\forall x \in \mathbf{N}, x^2 + 1$ không chia hết cho 4. ☐

c) $\forall x \in \mathbf{Z}, 3x > x$ ☐

d) $\forall x \in \mathbf{R}, x^3 = x$ ☐

Bài 12. Khoanh tròn vào chữ cái đặt trước câu em cho là đúng.

A. $\forall a \in \mathbf{R}, (a-1)^2 = (1-a)^2$

B. Nếu hai tam giác có các góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

C. Nếu một tứ giác có hai đường chéo vuông góc thì nó là hình thoi.

D. $\exists x \in \mathbf{R}, \sqrt{x} = x$.

Bài 13. Hãy ghép nối mỗi ý của cột A với một ý của cột B để được hai mệnh đề tương đương.

A	B
1. ΔABC vuông tại B	a) Tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối song song.
2. ΔMNP có $\widehat{M} = \widehat{N} + \widehat{P}$	b) ΔABC có $BA^2 + BC^2 = AC^2$
3. Tứ giác ABCD là hình bình hành.	c) ΔMNP vuông tại M
4. Tứ giác MNPQ nội tiếp một đường tròn.	d) ΔABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$
	e) Tứ giác MNPQ có : $\overset{\frown}{MNP} + \overset{\frown}{MQP} = 180^\circ$.

Hướng dẫn : $A \Rightarrow B$ đúng và $B \Rightarrow A$ đúng thì $A \Leftrightarrow B$.

Bài 14. Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và xét tính đúng, sai của chúng.

a) $\forall x \in \mathbf{Q}, 9x^2 - 1 \neq 0$

b) $\forall x \in \mathbf{Q}, x^2 > x$

c) $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 = \sqrt{5}x - (\sqrt{5} + 1)$

d) $\exists x \in \mathbf{N}^*$, x không chia hết cho x.

Hướng dẫn : Dùng kiến thức về mệnh đề phủ định để trả lời.

Dạng 3. CÁC PHÉP TOÁN CHỨNG MINH

A. PHƯƠNG PHÁP

1. **Chứng minh định lí :** "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$" (1)

Chứng minh định lí là dùng suy luận và những kiến thức đã biết để khẳng định mệnh đề đã cho là đúng, nghĩa là cần chứng minh với mọi x thuộc X mà P(x) đúng thì Q(x) đúng.

2. Chứng minh phản chứng

+ *Bước 1* : Giả sử tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ đúng và $Q(x_0)$ sai, tức là mệnh đề (1) là mệnh đề sai.

+ *Bước 2* : Dùng suy luận và những kiến thức toán học đã biết để đi đến mâu thuẫn.

+ *Bước 3* : Kết luận điều cần chứng minh.

3. Chứng minh quy nạp

Để chứng minh một mệnh đề T_n đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$ (n_0 là một số tự nhiên cho trước) ta thực hiện ba bước :

+ *Bước 1* : Chứng minh T_n đúng khi $n = n_0$.

+ *Bước 2* : Giả sử T_n đúng khi $n = k \geq n_0$.

+ *Bước 3* : Chứng minh T_n đúng khi $n = k + 1$.

B. BÀI TẬP

Bài 15. Chứng minh định lí sau :

Với mọi a, b không âm, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Hướng dẫn : Sử dụng hằng đẳng thức

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b.$$

Bài 16. Chứng minh định lí sau :

Với mọi $a \in \mathbf{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Hướng dẫn : Xét hai khả năng :
- Khi $a < 0$
- Khi $a \geq 0$

Dùng định nghĩa căn bậc hai số học để chứng minh.

Bài 17. Chứng minh rằng trong một tam giác bao giờ cũng có ít nhất một góc có số đo nhỏ hơn hoặc bằng 60°.

Hướng dẫn : Dùng phương pháp chứng minh phản chứng.

Bài 18. Chứng minh rằng : Nếu n^2 chia hết cho 5 thì n cũng chia hết cho 5.

Hướng dẫn : Tương tự bài 17.

Bài 19. Chứng minh rằng : $\forall n \in \mathbf{N}$, $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 121.

Hướng dẫn : Dùng phương pháp phản chứng.

Bài 20. Chứng minh rằng :

Với $\forall n \in \mathbf{N}^*$: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Hướng dẫn : Dùng phương pháp quy nạp.

Bài 21. Chứng minh rằng :

Với $\forall n \in \mathbf{N}^*$: $\frac{2}{1.2} + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2n}{(n+1)}$.

Hướng dẫn : Tương tự bài 20.

Dạng 4. TẬP HỢP – CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A PHƯƠNG PHÁP

1. Có hai cách ghi một tập hợp :

Cách 1 : Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp đó.

Cách 2 : Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

Chú ý : Tập hợp rỗng, kí hiệu $\varnothing$ là tập hợp không chứa phần tử nào.

2. Để chứng minh tập hợp A là tập hợp con của tập hợp B ta cần chứng minh mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B.

Chú ý :
- $A \subset A$
- $A \subset B$; $B \subset C$ thì $A \subset C$
- $\varnothing \subset A$

3. Để chứng minh hai tập hợp A và B bằng nhau ta cần chứng minh $A \subset B$ và $B \subset A$.

4. Để tìm giao của hai tập hợp ta tìm các phần tử chung của chúng.

5. Để tìm hợp của hai tập hợp A và B

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

6. Để tìm hiệu của hai tập hợp A và B

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

* Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ là phần bù của B trong A. Kí hiệu $C_A B$.

B. BÀI TẬP

Bài 22. Hãy xác định các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của chúng.

$A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ và } x \leq 11\}$

$B = \{y \mid y \in \mathbf{N} \text{ và } |y| \leq 5\}$

$C = \{t \mid t \in \mathbf{N}, t \vdots 2 \text{ và } t < 20\}$.

Hướng dẫn : Dùng cách ghi một tập hợp (cách 1).

Bài 23. Hãy xác định các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của chúng.

$M = \{1; 3; 5; 7; ...; 2005; 2007\}$

N : Tập hợp các số 1; 4; 9; 16; 25; ...; 100

$P = \{0; 2; 6; 12; 20; 30; 42; ...; 90\}$

Hướng dẫn : Dùng cách ghi một tập hợp (cách 2).

Bài 24. Cho hai tập hợp : $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2k, k \in \mathbf{N}; 20 \leq k \leq 25\}$

$B = \{40; 42; 44; 46; 48; 50\}$

Hai tập hợp A và B có bằng nhau không ?

Hướng dẫn : Viết tập hợp A dưới dạng liệt kê.

Bài 25. Khối lớp 10 của trường THPT Trần Quốc Tuấn có 1000 học sinh trong đó 75% học sinh thích môn Toán; 60% học sinh thích môn Văn.

a) Nếu có 50 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Toán và Văn.

b) Có ít nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Toán và Văn.

c) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Toán và Văn.

Hướng dẫn : Dùng biểu đồ Ven để suy luận và trả lời.

Bài 26. Cho tập hợp $A = \{a; b; 1; 2\}$

Viết tất cả các tập hợp con của tập hợp A.

Hướng dẫn :

- $M \subset A \Leftrightarrow$ Mọi phần tử của tập hợp M đều thuộc tập hợp A.
- Số tập hợp con của A bằng 2^4 tập hợp.

Bài 27. Cho hai tập hợp : $P = \{2000; 2002; 2004; 2006; 2008\}$

$Q = \{2001; 2003; 2005; 2007; 2009\}$

a) Tìm $P \cap Q$; $P \cup Q$.

b) Tìm $P \setminus Q$; $Q \setminus P$.

Hướng dẫn : Dùng cách tìm giao, hợp, hiệu hai tập hợp.

Bài 28. Cho hai tập hợp : $M = \{x \in \mathbf{N} \mid x \in Ư(6)\}$

$N = \{x \in \mathbf{N} \mid x \in Ư(8)\}$

a) Tìm tập hợp A gồm hai phần tử sao cho $A \subset M$ và $A \not\subset N$.

b) Tìm $M \cap N$; $M \cup N$ và $N \setminus M$.

Bài 29. Đúng ghi Đ, sai ghi S vào ô trống.

a) Nếu $A \subset B$ thì $A \cup B = B$ ☐

b) Nếu $B \subset A$ thì $A \cap B = B$ ☐

c) Nếu $A = B$ thì $A \setminus B = A$ ☐

d) Nếu $A \subset B$ thì $C_B A = B \setminus A$ ☐

Bài 30. Khoanh tròn vào chữ đứng trước câu đúng.

Cho hai tập hợp : $E = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$

$F = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \le 4\}$

Tập hợp M thỏa mãn $C_F E = M$ là :

A. $M = \varnothing$

B. $M = \{-1; 4\}$

C. $M = \{-4; -3; -2; 0; 1; 2; 3\}$

D. Các kết quả trên đều sai.

Dạng 5. CÁC TẬP HỢP SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Tập hợp các số tự nhiên N

$\mathbf{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$

Chú ý : $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$

2. Tập hợp các số nguyên Z

$\mathbf{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

3. Tập hợp các số hữu tỉ Q

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z};\ b \neq 0\right\}$$

4. Tập hợp các số vô tỉ I

I : Tập hợp các số thập phân vô hạn không tuần hoàn

5. Tập hợp các số thực R

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$$

6. Các tập hợp con thường dùng của R

a) $(a; b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$

b) $(a; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$

c) $(-\infty; b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$

d) $[a; b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}$

e) $(a; b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\}$

f) $[a; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x\}$

g) $(-\infty; b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \le b\}$

h) $(-\infty; +\infty) = \mathbf{R}$.

B. BÀI TẬP

Bài 31. Điền dấu × vào ô trống của câu đúng.

$$A = (-4; 3) \cap (-1; 5)$$

a) $A = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ ☐ b) $A = \{-4; -1\}$ ☐

c) $A = [-1; 3]$ ☐ d) $A = (-1; 3)$ ☐

Hướng dẫn : Dùng các tập hợp con của R để suy luận.

Bài 32. Đúng ghi Đ, sai ghi S vào ô trống.

a) $[-5; 10) \cup (7; 2006] = [-5; 2006]$ ☐

b) $(-\infty; -1] \cup [0; 15] = (-\infty; 15]$ ☐

c) $(-4; 1) \cap [1; 6) = \varnothing$ ☐

d) $(-\infty; 0) \cap [-1; +\infty) = [-1; 0)$ ☐

Hướng dẫn : Tương tự bài 31.

Bài 33. Khoanh tròn vào chữ đứng trước câu sai.

A. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ B. $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$

C. $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \mathbf{Z}$ D. $\mathbf{Z} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$.

Hướng dẫn : Dùng kiến thức về các tập hợp số để chọn kết quả sai.

Bài 34. Cho $A = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 2k + 1;\ k \in \mathbf{Z}\}$

$B = \{1; 3; 5; 7; \ldots\}$

Khoanh tròn vào chữ đứng trước câu đúng.

A. $A = B$ B. $A \cap B = B$

C. $A \cup B = B$ D. $A \backslash B = A$.

Hướng dẫn : Liệt kê các phần tử của tập hợp A để suy luận.

Bài 35. Xác định tập hợp số sau và biểu diễn tập hợp này trên trục số.

a) $(-2; 2) \cup (1; 5)$ b) $(-3; 2) \cap (0; 5)$

c) $\mathbf{R} \backslash (1; +\infty)$ d) $[-5; 4) \cap [2; 7]$.

Hướng dẫn : Từ các tập hợp con của **R**, xác định các tập hợp số cần tìm và biểu diễn chúng lên trục số.

Dạng 6. SỐ GẦN ĐÚNG – SAI SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Sai số tuyệt đối của số gần đúng

* Cho a là giá trị đúng, a' là giá trị gần đúng của a, lúc đó :

$\Delta_{a'} = |a - a'|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a'.

* Độ chính xác của một số gần đúng.

Gọi d là cận trên của sai số tuyệt đối.

Ta có : $|a - a'| \le d \iff -d \le a - a' \le d$

$\iff a' - d \le a \le a' + d$

Ta còn nói d là độ chính xác của số gần đúng a'.

2. Sai số tương đối của số gần đúng

$\delta_{a'} = \dfrac{|a - a'|}{|a'|}$ gọi là sai số tương đối của số gần đúng a'.

Chú ý : Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

3. Số quy tròn

Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Khi đó, độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

4. Chữ số chắc và cách viết chuẩn số gần đúng

- Cho số đúng là a, số gần đúng là a' với độ chính xác là d. Trong số a', một chữ số được gọi là chữ số chắc nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.
- Tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc đều là chữ số chắc. Tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc đều là chữ số không chắc.

B. BÀI TẬP

Bài 36. Biết $\sqrt[3]{7} = 1,912931183$

Viết số gần đúng $\sqrt[3]{5}$ theo nguyên tắc làm tròn với ba, bốn chữ số thập phân và ước lượng sai số tuyệt đối.

Hướng dẫn : Dùng kiến thức về sai số tuyệt đối.

Bài 37. Khoanh tròn vào chữ đứng trước câu đúng.

Một cái băng có chiều dài $l = 2,25\text{m} \pm 0,01\text{m}$. Các chữ số đáng tin của l là :

A. chữ số 2.

B. chữ số 5.

C. Các chữ số từ hàng phần mười trở lên.

D. Các kết quả trên đều sai.

Hướng dẫn : $\Delta l \leq 0,01$ từ đó suy ra chữ số đáng tin (chắc) của l.

Bài 38. Cho giá trị gần đúng của số vô tỉ $\sqrt{3}$ là 1,732050808 có 7 chữ số chắc.

a) Hãy quy tròn số $\sqrt{3}$ và ước lượng sai số tuyệt đối.

b) Hãy ước lượng sai số tuyệt đối nếu lấy giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ là 1,73 hoặc 1,732.

Tìm các chữ số đáng tin ở mỗi trường hợp.

Hướng dẫn : Theo quy tắc quy tròn.

Bài 39. Nêu quy trình ấn phím trên máy Fx500MS (lấy 5 chữ số thập phân) với các phép toán sau :

a) $2^7.\sqrt{15}$ b) $\left(\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{52}\right):7^2$.

Hướng dẫn : Để làm tròn kết quả với 5 số thập phân bằng cách ấn liên tiếp phím MODE cho đến khi màn hình hiện ra.

Fix	Sci	Norm
1	2	3

Ấn liên tiếp $\boxed{1}\ \boxed{5}$ để lấy 5 chữ số thập phân.

Bài 40. Cho số đúng a = 573495 ± 200.

Hãy viết số quy tròn của số 573495.

Hướng dẫn : Căn cứ vào độ chính xác đến hàng trăm nên ta quy tròn số 573495 đến hàng nghìn.

Dạng 7. TỔNG HỢP

Bài 41. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2}-1)x - 1 = 0\}$

và tập hợp $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 - (2+\sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0\}$

Hai tập hợp A và B có bằng nhau không ? Vì sao ?

Hướng dẫn : Hãy liệt kê các phần tử của từng tập hợp rồi suy ra điều cần chứng minh.

Bài 42. Cho M và N là hai tập hợp và mệnh đề P : "M là tập con của N".

a) Viết P dưới dạng một mệnh đề kéo theo.

b) Viết mệnh đề đảo của P.

Hướng dẫn : Dùng khái niệm mệnh đề kéo theo để trả lời.

Bài 43. Dùng kí hiệu ∀, ∃ để viết các mệnh đề sau rồi lập mệnh đề phủ định và xét tính đúng, sai của các mệnh đề đó.

a) Mọi số thực luôn có bình phương là một số không âm.

b) Tồn tại số nguyên sao cho lập phương của chúng bằng chính nó.

Bài 44. Hãy ghép nối mỗi ý của cột A với một ý của cột B để được hai mệnh đề tương đương.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC / 2731

A	B
1. P : "$x \in A$ và $x \notin B$"	a) M : "$x \in A \cap B$"
2. Q : "$x \in A$ và $x \in B$"	b) N : "$x \in A \setminus B$"
3. R : "$x \in A$ hoặc $x \in B$"	c) T : "$x \in A \subset B$"
	d) S : "$x \in A \cup B$"

Hướng dẫn : Dùng khái niệm hai mệnh đề tương đương.

Bài 45. Đúng ghi Đ, sai ghi S vào ô trống.

a) $M \cap N \subset N$ ☐

b) $M \cup N \subset M$ ☐

c) $M \subset N$; $C_N M = M \setminus N$ ☐

d) $M \cap N \subset M \cup N$ ☐

e) $M \subset M \cup N$ ☐

f) $M \subset M \cap N$ ☐

Hướng dẫn : Dùng các phép toán trên tập hợp để trả lời.

Bài 46. Xác định các tập hợp sau :

a) $(-2006; 3) \cup [3; 2006)$ b) $(-\infty; 2006) \cap (2006; +\infty)$

c) $(-10; 10] \cap (0; +\infty)$ d) $N \setminus \{0\}$.

Hướng dẫn : Cách xác định tập hợp số.

Bài 47. Biết số gần đúng $\beta = 257,3593$ có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,01. Viết số quy tròn của β.

Hướng dẫn : Dùng cách viết quy tròn của một số để giải.

Chương 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

Dạng 1. HÀM SỐ – ĐỒ THỊ – TÍNH CHẴN, LẺ

A. PHƯƠNG PHÁP

– Để tìm tập xác định của một hàm số ta tìm tập hợp tất cả các giá trị của biến sao cho hàm số có nghĩa.

– Để cho một hàm số ta có thể :

+ Cho bằng bảng.

+ Cho bằng đồ thị.

+ Cho bằng biểu đồ.

+ Cho bằng công thức.

– Để vẽ đồ thị của một hàm số $y = f(x)$ (xác định trên tập D) ta biểu diễn tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy (với $\forall x \in D$).

– Để chứng minh hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D là hàm số chẵn ta cần chứng minh với $\forall x \in D$ thì : $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x). \end{cases}$

– Để chứng minh hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D là hàm số lẻ ta cần chứng minh với $\forall x \in D$ thì : $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x). \end{cases}$

B. BÀI TẬP

Bài 48. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = x^2 + x + 1$ b) $y = \dfrac{x + 2}{3x - 1}$

c) $y = \sqrt{5 - x} + \sqrt{2x - 3}$ d) $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Hướng dẫn : Sử dụng cách tìm TXĐ của một hàm số.

Bài 49. Tìm tập xác định của hàm số :

a) $y = \dfrac{|x - 1|}{|x + 1| + 1}$ b) $y = \dfrac{|x - 1|}{|x + 1| - 1}$.

Hướng dẫn : – Chú ý : $|a| \geq 0$ với $\forall a \in \mathbf{R}$.

– Để phân thức có nghĩa ⇔ Mẫu thức khác 0.

Bài 50*. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

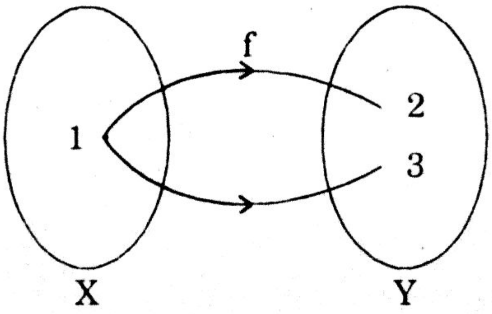
b) $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

c) $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$.

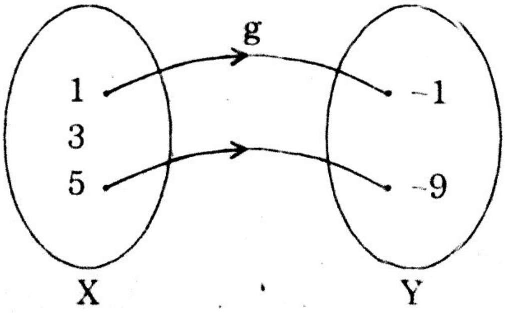
Hướng dẫn : $\sqrt{A}$ có nghĩa ⇔ $A \geq 0$.

Bài 51. Trong các quy tắc cho tương ứng ở hình sau, quy tắc nào cho ta một hàm số ?

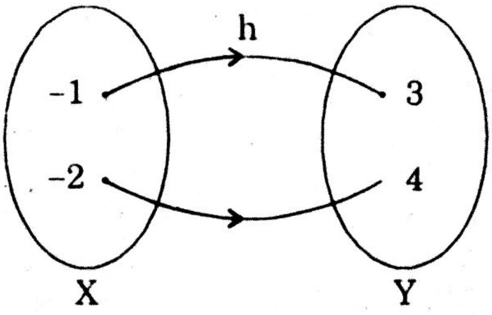
a)



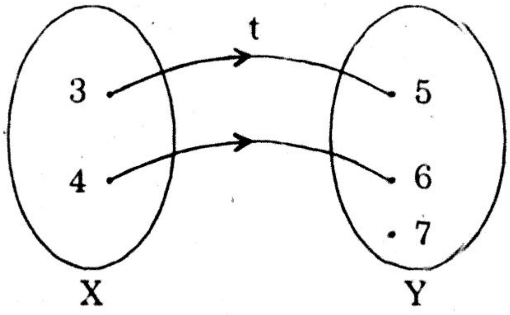
b)



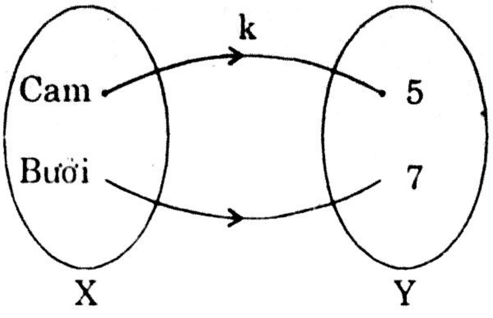
c)



d)



e)


k
Cam
Bưởi
5
7
X
Y

Hướng dẫn : Dựa vào định nghĩa hàm số để trả lời.

Bài 52. Xét tính đồng biến và nghịch biến của các hàm số sau :

a) $y = -3x^2$ trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

b) $y = \dfrac{x}{x - 5}$ trên $(-\infty; 5)$ và $(5; +\infty)$.

Hướng dẫn : Lấy x_1, x_2 bất kì thuộc khoảng đang xét với $x_1 \neq x_2$.

- Nếu $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng đang xét.
- Nếu $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng đang xét.

Bài 53. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau :

a) $y = x^2 + 2x + 1$ trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

b) $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hướng dẫn :

- Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trên các khoảng đã cho.
- Lập bảng biến thiên.

Bài 54. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau :

a) $y = |2x|$

b) $y = (x^2 + 3)^2$.

Hướng dẫn : Dựa vào tính chất chẵn, lẻ của hàm số.

Bài 55. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau :

a) $y = |x + 3| - |x - 3|$

b) $y = \sqrt{x + 1}$ $(x \geq -1)$

c) $y = x - \dfrac{x^5 - x}{\sqrt{x^2 + |x|}}$

d) $y = |x - 3| + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

Hướng dẫn : Tương tự bài 54.

Bài 56. Khoanh tròn vào chữ đứng trước câu đúng.

Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - x} + \dfrac{1}{2x\sqrt{1 + x}}$ là :

A. $D = (1; 1)$

B. $D = \mathbf{R}\backslash(1; 1)$

C. $D = (-1; 0) \cup (0; 1]$

D. Các kết quả trên đều sai.

Hướng dẫn : Để tìm TXĐ của hàm số đã cho ta cần thực hiện :

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 + x > 0 \\ x\sqrt{1 + x} \neq 0. \end{cases}$$

Bài 57. Đánh dấu × vào ô trống của câu đúng.

Hàm số $y = \dfrac{|x + 1| + |x - 1|}{|x + 1| - |x - 1|}$

a) là hàm số chẵn. ☐

b) là hàm số lẻ. ☐

c) là hàm số không chẵn, không lẻ. ☐

Hướng dẫn : Tương tự bài 55.

Dạng 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Để khảo sát hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ ta thực hiện các bước :

– *Bước 1* : Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Bước 2 : Xét chiều biến thiên $\begin{cases} a > 0 : \text{hàm đồng biến trên } \mathbb{R} \\ a < 0 : \text{hàm nghịch biến trên } \mathbb{R}. \end{cases}$

Bước 3 : Lập bảng biến thiên.

Bước 4 : Vẽ đồ thị $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

+ Nếu $b = 0$: đồ thị là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.

+ Nếu $b \neq 0$: đồ thị là đường thẳng song song với đường thẳng $y = ax$ và đi qua hai điểm $A(0; b)$ và $B\left(\dfrac{-b}{a}; 0\right)$.

2. Đồ thị hàm số $y = b$ (hàm hằng) là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0; b)$.

B. BÀI TẬP

Bài 58. Vẽ đồ thị các hàm số sau :

a) $y = -x + 2$

b) $y = \begin{cases} x + 2 & \text{với } x > 2 \\ 4 & \text{với } x \leq 2. \end{cases}$

Hướng dẫn : Trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Xác định hai điểm thuộc đồ thị :

- Điểm cắt trục tung $A(0;\, b)$
- Điểm cắt trục hoành $B\left(\frac{-b}{a};\, 0\right)$.

Bài 59. Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \frac{3}{4}x + 3$ b) $y = |2x + 1|$.

Hướng dẫn : Tương tự bài 58.

Bài 60. Viết phương trình đường thẳng có hệ số góc bằng -3 và đi qua điểm $M(1;\, 2)$.

Hướng dẫn : Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$. Căn cứ vào hệ số góc đã cho ta tìm điểm a, thay tọa độ điểm M vào đường thẳng ta tìm được b.

Bài 61. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-1;\, 1)$ và $B(3;\, -2)$. Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Hướng dẫn :

- Viết phương trình đường thẳng AB.
- Xác định tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.
- Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Bài 62. Khoanh tròn vào chữ đặt trước câu có kết quả đúng.

Phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $y = -5x + 1$ và đi qua điểm $A\left(\frac{2}{5};\, -3\right)$ là :

A. $y = \frac{2}{5}x - 1$ B. $y = -5x + 3$

C. $y = -5x - 1$ D. $y = -5x - 3$.

Hướng dẫn : Chú ý hệ số góc của hai đường thẳng song song.

Bài 63. Điền × vào ô trống của câu đúng.

a) Hàm số $y = \frac{-3}{4}x + \frac{4}{3}$ là hàm số chẵn. ☐

b) Hàm số $y = \frac{2}{3}x - 1$ là hàm số lẻ. ☐

c) Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A\left(0; \frac{1}{3}\right)$ và $B\left(\frac{-2}{3}; \frac{-5}{3}\right)$ có hệ số a và b là $a = 3$ và $b = \frac{1}{3}$. ☐

Hướng dẫn : Dựa vào tính chất chẵn, lẻ và đồ thị của hàm số $y = ax + b$ để chọn câu đúng.

Bài 64. Điền dấu × vào câu trả lời đúng.

Cho hai đường thẳng $(D) : mx - y = m$

$(D') : x + my = 5$

a) Với mọi m thì (D) và (D') luôn song song. ☐

b) Với mọi m thì (D) và (D') luôn cắt nhau. ☐

c) Với mọi m thì (D) và (D') luôn trùng nhau. ☐

Hướng dẫn : Dựa vào hệ số góc của hai đường thẳng để trả lời.

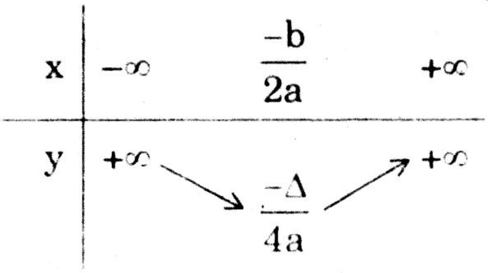
Dạng 3. HÀM SỐ BẬC HAI

A. PHƯƠNG PHÁP

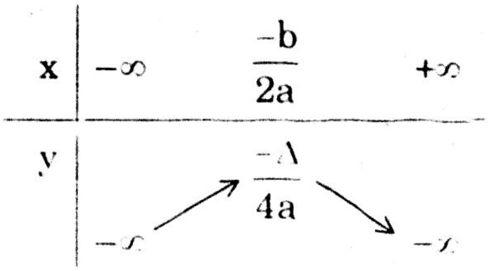
Để khảo sát hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ta thực hiện theo các bước :

- *Bước 1* : Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- *Bước 2* : Xác định tọa độ của đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.
- *Bước 3* : Bảng biến thiên.

(a > 0)



(a < 0)



– *Bước 4* : Vẽ trục đối xứng $x = \frac{b}{2a}$, tìm giao điểm với trục Oy và giao điểm với trục Ox.

– *Bước 5* : Vẽ đồ thị, kết luận.

B. BÀI TẬP

Bài 65. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$ b) $y = -x^2 + 4x - 3$.

Hướng dẫn : Thực hiện theo các bước giải trên.

Bài 66. Xác định parabol $y = ax^2 + bx - 1$ biết parabol đó :

a) Đi qua hai điểm P(2; 7) và Q(–1; 4).

b) Đi qua điểm M(1; 6) và có trục đối xứng là $x = \frac{-3}{4}$.

Hướng dẫn :

a) Thay tọa độ điểm P và Q vào hàm số, giải hệ phương trình để tìm a và b.

b) Thay tọa độ điểm M vào hàm số và chú ý hoành độ của tọa độ đỉnh $x = \frac{-b}{2a}$.

Bài 67. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 3$ biết đồ thị của chúng :

a) Có tọa độ đỉnh I(1; 5).

b) Đi qua điểm H(–1; 9) và có tung độ của đỉnh là 1.

Hướng dẫn :

a) Dựa vào tọa độ đỉnh của parabol $I\left(x = \frac{-b}{2a}; y = \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

b) Thay tọa độ điểm H(–1; 9) vào hàm số và dựa vào tung độ của đỉnh $y = \frac{-\Delta}{4a}$ để tìm a và b.

Bài 68. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$ biết rằng đồ thị của nó có tọa độ đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; \frac{-25}{4}\right)$ và đi qua điểm M(2; –4).

Hướng dẫn : Parabol đi qua hai điểm I, M có trục đối xứng là $x = \frac{-b}{2a}$.

Bài 69. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị của nó đi qua ba điểm A(0; 4), B(1; 9) và C(–2; 6).

Hướng dẫn : Thay tọa độ ba điểm A, B, C vào hàm số.

Bài 70. Đánh dấu × vào ô trống câu có kết quả đúng.

Parabol $y = -3x^2 + 4x + 7$

a) Đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. ☐

b) Đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-2}{3}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-2}{3}; +\infty\right)$. ☐

c) Đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-2}{3}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-2}{3}\right)$. ☐

d) Các kết quả trên đều sai. ☐

Hướng dẫn : – Chú ý hệ số a.

– Xác định hoành độ của tọa độ đỉnh.

Bài 71. Đánh dấu × vào câu có kết quả không đúng.

a) Parabol $y = -2x^2 + 4x - 7$ có trục đối xứng là $x = 1$. ☐

b) Parabol $y = 3x^2 + 5x + 2$ có tọa độ đỉnh $I\left(\frac{5}{6}; \frac{-1}{12}\right)$. ☐

c) Parabol $y = x^2 + 5x - 6$ cắt trục hoành tại hai điểm A(1; 0) và (–6; 0). ☐

d) Parabol $y = 3x^2 + 6x - 1$ đồng biến trên khoảng (–2006; –1). ☐

Hướng dẫn : Xác định tọa độ đỉnh và xét chiều biến thiên của hàm số bậc hai.

Bài 72. Khoanh tròn vào chữ đứng trước câu trả lời đúng.

Parabol $y = ax^2 - 4x + c$ đi qua hai điểm M(2; 3) và N(–3; 38) là :

A. $y = -3x^2 + 4x - 1$ B. $y = 3x^2 + 4x + 1$

C. $y = 3x^2 - 4x - 1$ D. $y = -3x^2 - 4x - 1$.

Hướng dẫn : Tương tự bài 66.

Bài 73. Khoanh tròn vào chữ đứng trước câu trả lời đúng.

Một chiếc ăng-ten thu sóng lòng chảo là parabol có chiều cao 3m và đường kính 4m ở mặt cắt qua trục ta được một parabol dạng $y = ax^2$. Hệ số a cần tìm là :

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn : Xác định tọa độ điểm thuộc parabol.

Bài 74. Đúng ghi Đ, sai ghi S vào ô trống.

Cho parabol (P) : $y = x^2 + x + 2$ và đường thẳng (d) : $y = ax + 1$. (P) và (d) tiếp xúc khi hệ số a của đường thẳng (d) là :

a) $a = -1$ hoặc $a = 3$ ☐ b) $a = 1$ hoặc $a = -3$ ☐

c) $a = 2$ ☐ d) Không tìm được a. ☐

Bài 75. Chọn kết quả đúng và điền dấu × vào ô trống.

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = -2$ và đi qua điểm $A\left(1; \frac{11}{2}\right)$. Hệ số a, b, c là :

a) $a = 1; b = \frac{1}{2}; c = 2$ ☐ b) $a = \frac{1}{2}; b = 2; c = 3$ ☐

c) $a = 2; b = 1; c = 5$ ☐ d) Một đáp số khác. ☐

Hướng dẫn : Tương tự bài 68.

Dạng 4. TỔNG HỢP

Bài 76. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau :

a) $y = |x|$ b) $y = x^3 - 2x$

c) $y = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ d) $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(|x| \leq 1)$.

Hướng dẫn : Tương tự bài 54 và 55.

Bài 77. Tìm tập xác định của hàm số : $y = \frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 5}$.

Hướng dẫn : Nhận xét mẫu thức.

Bài 78.

a) Tìm parabol $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị đi qua điểm $A(1; -8)$ và có tọa độ đỉnh $I(-1; 4)$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị parabol vừa tìm.

Bài 79. Cho hai hàm số $y = x^2 + 2x + 4$ (P) và $y = kx + 2$ (d).

a) Tìm k để đồ thị hai hàm số tiếp xúc.

b) Tìm k để đồ thị hai hàm số có hai điểm chung.

Bài 80*. Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$. Một đường thẳng (d) đi qua M(0; 6) và cắt parabol theo một dây cung nhận điểm M là trung điểm, lập phương trình đường thẳng (d).

Bài 81. Chọn kết quả đúng.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng (a; b).

Hàm số $y = -f(x)$:

A. Đồng biến trên khoảng (a; b).

B. Nghịch biến trên khoảng (a; b).

C. Không thể xác định đồng biến hay nghịch biến trên khoảng (a; b).

Bài 82. Hãy ghép nối mỗi ý của cột A với một ý của cột B để được khẳng định đúng.

A	B
1. Giao điểm của parabol $y = 4x^2 - 3x - 1$ với đường thẳng $y = -x + 1$ là : 2. Giao điểm của parabol $y = -x^2 - 5x$ với đường thẳng (d) : $y = -x + 3$ là :	a) P(0; 3), Q(–3; 6) b) A(1; 0) và $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ c) M(–3; 6), N(–1; 4)

Bài 83. Khoanh tròn vào chữ đứng trước câu có kết quả đúng.

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ nhận trục tung làm trục đối xứng và cắt đường thẳng $y = -x$ tại các điểm có hoành độ –2; 3 là :

A. $y = x^2 + 6$

B. $y = 2x^2 + 3x - 6$

C. $y = -x^2 + 6$

D. $y = -x^2 + 3x - 6$.

Chương 3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dạng 1. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

A. PHƯƠNG PHÁP

I. Phương trình bậc nhất

$ax + b = 0$		
Hệ số	Kết luận	
$a \neq 0$	Có 1 nghiệm duy nhất $x = \frac{-b}{a}$	
$a = 0$	$b = 0$	Phương trình có vô số nghiệm
	$b \neq 0$	Phương trình vô nghiệm

Chú ý : Khi $a \neq 0$, phương trình $ax + b = 0$ gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

II. Phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$	
$\Delta = b^2 - 4ac$	Kết luận
$\Delta < 0$	Phương trình vô nghiệm
$\Delta = 0$	Phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta > 0$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

III. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

1. $|f(x)| = a$ (a là hằng số)

- $a < 0$, phương trình vô nghiệm.
- $a = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

- $a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$

2. $|f(x)| = g(x) \quad (1)$

Phương pháp 1 : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \quad (b)$

Phương pháp 2 : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad (a)$

Tập nghiệm của (1) là hợp của các tập nghiệm của các hệ (a) và (b).

3. Phương trình có nhiều dấu giá trị tuyệt đối :

a) $|f(x)| = |g(x)| \quad (*)$

Phương pháp 1 : $(*) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$

Phương pháp 2 : $(*) \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$

b) $f(x) + g(x) = h(x)$

Phương pháp : Xét các khoảng trên trục số phân chia trường hợp đưa phương trình về dạng phương trình không chứa dấu giá trị tuyệt đối.

IV. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \neq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \neq 0 \\ f(x) - h(x).g(x) = 0 \end{cases}$

V. Phương trình trùng phương : $ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1)$

Phương pháp : Đặt $t = x^2 \geq 0$, $\quad (1) \Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$

VI. Phương trình vô tỉ

a) $\sqrt{[f(x)]^2} = a \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| = a$

(Xem cách giải phương trình giá trị tuyệt đối)

b) $\sqrt{f(x)} = a$

- Nếu $a < 0$, phương trình vô nghiệm.
- Nếu $a = 0 \qquad f(x) = 0$
- Nếu $a > 0 \qquad \sqrt{f(x)} = a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^2 \end{cases}$

c) Đặt ẩn phụ, lưu ý điều kiện kèm theo của ẩn phụ.

d) Áp dụng hằng đẳng thức một cách linh hoạt.

e) Nhận xét nghiệm nhờ so sánh hai vế...

B. BÀI TẬP

Bài 84. Giải phương trình : $5x - 3 = 5(x - 1)$.

Bài 85. Giải và biện luận phương trình : $x + m^2 = 1 + mx$.

Bài 86. Giải và biện luận phương trình : $mx - 2m^2 = -3x + 6m$.

Hướng dẫn : Bài 84, 85, 86 dựa vào phương pháp giải phương trình dạng $ax + b = 0$.

Bài 87. Giải phương trình : $(m - 1)x^2 + x - m = 0$.

Hướng dẫn : – Khi $m = 1$

– Khi $m \neq 1$.

Bài 88. Giải phương trình : $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 63$.

Hướng dẫn : Đặt ẩn phụ đưa về giải phương trình bậc hai.

Bài 89. Cho phương trình bậc hai ẩn x : $x^2 + 2mx + 1 + 2m + m^2 = 0$.

Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn : – Lập Δ'

– Xét $\Delta' > 0$.

Bài 90. Cho phương trình : $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$

Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Hướng dẫn : Chứng tỏ được $\Delta' > 0$.

Bài 91. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm cùng âm.

a) $2x^2 + 5x + 1 - m = 0$ b) $3x^2 + 4x + 2(m - 1) = 0$.

Hướng dẫn :

Phương trình bậc hai có hai nghiệm cùng âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0. \end{cases}$

Bài 92. Giải phương trình : $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) - 24 = 0$.

Hướng dẫn : Tương tự bài 88.

Bài 93. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm cùng dương :

$$x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0.$$

Hướng dẫn :

Phương trình bậc hai có hai nghiệm cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0. \end{cases}$

Bài 94. Gọi hai nghiệm của phương trình : $x^2 - 7x - 11 = 0$ là x_1 và x_2

Hãy lập phương trình bậc hai có các nghiệm là : $x_1 + x_2$ và x_1x_2.

Hướng dẫn : Tìm hai nghiệm của phương trình bậc hai cần lập.

Bài 95. Cho phương trình ẩn x :

$$x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0.$$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm khác dấu.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

Hướng dẫn : Phương trình bậc hai có hai nghiệm :

a) cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$ b) khác dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P < 0 \end{cases}$

Dạng 2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. PHƯƠNG PHÁP

– Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là phương trình có dạng : $ax + by = c$, trong đó $a, b, c \in \mathbf{R}$, a và b không đồng thời bằng 0.

– Cặp giá trị $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 = c$ gọi là nghiệm của phương trình trên tập số thực **R**.

1. a và b đều khác 0

$$ax + by = c \Leftrightarrow by = c - ax \Leftrightarrow y = \frac{c - ax}{b}$$

Nghiệm tổng quát : $(x \in \mathbf{R}; y = \frac{c - ax}{b})$

Hoặc : $ax + by = c \Leftrightarrow ax = c - by \Leftrightarrow x = \dfrac{c - by}{a}$

Nghiệm tổng quát : $(x = \dfrac{c - by}{a}; y \in \mathbf{R})$.

2. $a = 0$ và $b \neq 0$

$$0x + by = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{b}$$

Nghiệm tổng quát : $(x \in \mathbf{R}; y = \dfrac{c}{b})$

3. $a \neq 0$ và $b = 0$

$$ax + 0y = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$$

Nghiệm tổng quát : $(x = \dfrac{c}{a}; y \in \mathbf{R})$

Nâng cao : Tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$ $(a, b, c, x, y \in \mathbf{Z})$.

Phương pháp : Vận dụng lí thuyết chia hết trên tập hợp **Z**.

B. BÀI TẬP

Bài 96. Giải các phương trình :

a) $0x + 3y = 2$ b) $-3x + 0y = 3$

c) $2x - 3y = 5$.

Hướng dẫn : Sử dụng phương pháp giải ở trên để tìm nghiệm tổng quát của phương trình.

Bài 97. Giải phương trình $2x + y = 5$ và biểu diễn tập nghiệm lên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Hướng dẫn :

- Dùng phương pháp giải.
- Biểu diễn hình học tập nghiệm của phương trình là một đường thẳng.

Bài 98. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $3x + 2y = 17$.

Hướng dẫn : Sử dụng tính chất chia hết trên **Z**.

Bài 99. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $3x + 17y = 123$.

Hướng dẫn : Tương tự bài 98.

Bài 100. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $3x + 4y = 43$.

Hướng dẫn :

- Tìm nghiệm nguyên của phương trình.
- Sau đó lập luận : $(x > 0; y > 0)$ để suy ra nghiệm nguyên dương.

Bài 101. Chứng tỏ phương trình : $3x + 6y = 23$ không thể có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn : Chú ý vế trái của phương trình chia hết cho 3 còn vế phải của phương trình không chia hết cho 3.

Dạng 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN : $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (*)

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Phương pháp cộng

Giả sử b_1 và b_2 khác 0

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

- Nếu $a_1b_1 - a_2b_1 \neq 0$ hay $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ thì hệ có nghiệm duy nhất là :

$$\left(x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1};\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$

- Nếu $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ và $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$ hay $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ thì hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.

- Nếu $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ và $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$ hay $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

2. Phương pháp thế

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có : $y = \dfrac{c_1 - a_1x}{b_1}$ $\quad (b_1 \neq 0)$

Thay giá trị y vào phương trình (2) :

$$a_2x + b_2\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2 \iff a_2b_1x + b_2c_1 - a_1b_2x = b_1c_2$$

$$\iff (a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$$

Lập luận để tìm nghiệm của hệ phương trình (nếu có).

3. Phương pháp đồ thị

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (d_1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (d_2) \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng (d_1) và (d_2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

- Nếu (d_1) và (d_2) cắt nhau thì tọa độ giao điểm chính là nghiệm duy nhất của hệ.
- Nếu (d_1) và (d_2) song song thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Nếu (d_1) và (d_2) trùng nhau thì hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.

4. Phương pháp so sánh

- Rút x từ hai phương trình rồi cho bằng nhau.
- Hoặc rút y từ hai phương trình rồi cho bằng nhau.

5. Phương pháp dùng định thức Cramer

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Đặt $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất là :

$$\left(x = \frac{D_x}{D};\ y = \frac{D_y}{D}\right)$$

- Nếu $D = 0$, $D_x = 0$ và $D_y = 0$ thì hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.
- Nếu $D = 0$ mà $D_x \neq 0$ và $D_y \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

B. BÀI TẬP

Bài 102. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 4y = 13 \\ 4x + 5y = -6. \end{cases}$

Bài 103. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế : $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 3y = -8. \end{cases}$

Bài 104. Giải hệ phương trình bằng phương pháp đồ thị : $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

Bài 105. Dùng phương pháp so sánh, hãy giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Bài 106. Dùng định thức Cramer giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ -x + 2y = 4. \end{cases}$

Hướng dẫn : Từ bài 102 đến bài 106. Dùng phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 107. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} mx - y = n \\ kx - y = n \end{cases}$

a) Chứng tỏ hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi m, n, k bất kì.

b) Hệ đã cho có thể có vô số nghiệm được không ?

Hướng dẫn : Biến đổi hệ dưới dạng : $\begin{cases} y = mx - n \\ y = kx - n \end{cases}$

Chú ý : – Nếu $m = k \Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm.

– Nếu $m \neq k \Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 108. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 2x - ay = 3 \\ ax + 3y = 4 \end{cases}$

Với giá trị nguyên nào của a thì nghiệm của hệ thỏa mãn $x < 0$ và $y > 0$.

Hướng dẫn : Tìm nghiệm của hệ theo a.

Bài 109. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3. \end{cases}$$

Hướng dẫn : Bằng phương pháp thế biểu thị x theo y ở phương trình thứ nhất, sau đó thay vào phương trình thứ hai. Biện luận sự có nghiệm của hệ theo m.

Bài 110. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 3x + ny = 5 \\ nx - y = 2 \end{cases}$

Tìm n để hệ có nghiệm thỏa mãn : $x + y = 1 + \dfrac{-n^2}{n^2 + 3}$.

Hướng dẫn : Tìm nghiệm của hệ theo n.

Thay giá trị của nghiệm vào đẳng thức : $x + y = 1 + \dfrac{-n^2}{n^2 + 3}$.

Từ đó suy ra n.

II. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & (3) \end{cases}$$

Trong đó x, y, z là ba ẩn, các chữ còn lại là các hệ số.

Mỗi bộ ba $(x_0; y_0; z_0)$ nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình.

A. PHƯƠNG PHÁP

- Nhân hai vế phương trình (1) của hệ với c_2, nhân hai vế của phương trình (2) của hệ với c_1, sau đó trừ vế theo vế ta có :

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = d_1c_2 - d_2c_1 \qquad (4)$$

- Nhân hai vế phương trình (1) của hệ với c_3, nhân hai vế của phương trình (3) của hệ với c_1, sau đó trừ vế theo vế ta có :

$$(a_1c_3 - a_3c_1)x + (b_1c_3 - b_3c_1)y = d_1c_3 - d_3c_1 \qquad (5)$$

- Giải hệ hai phương trình bậc nhất (4) và (5) ta tìm được x và y (nếu có) rồi suy ra trị số của z.

B. BÀI TẬP

Bài 111. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 9 \\ 3x - y + 4z = -3. \end{cases}$

Bài 112. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x - z = 2 \\ y - 3z = 2 \\ -3x - 2y + z = -2. \end{cases}$

Bài 113. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2(x + y) = 3xy \\ 6(y + z) = 5yz \\ 3(z + x) = 4zx. \end{cases}$

Bài 114. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ y + z + t = 12 \\ z + t + x = 11 \\ t + x + y = 10. \end{cases}$

Bài 115. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{5} \\ 4x - 3y + 2z = 12. \end{cases}$

Chương 4. BẤT ĐẲNG THỨC BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. BẤT ĐẲNG THỨC

■ TÍNH CHẤT

1. $a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c$

2. $a < b \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a.c < b.c \text{ nếu } c > 0 \\ a.c > b.c \text{ nếu } c < 0 \end{array}\right.$

3. $a < b$ và $c < d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d$

4. Với $a > 0,\ c > 0$: $a < b$ và $c < d \quad \Rightarrow \quad ac < bd$

5. $a < b \quad \Rightarrow \quad a^{2n+1} < b^{2n+1} \quad (n \in \mathbf{Z}_+)$

$0 < a < b \quad \Rightarrow \quad a^{2n} < b^{2n} \quad (n \in \mathbf{Z}_+)$

6. Với $a > 0$: $a < b \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}$

7. $a < b \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

■ MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC CẦN BIẾT

1. Bất đẳng thức Cô-si

Với mọi $a, b > 0$: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, dấu "=" xảy ra $\Leftarrow$ $a = b$.

Mở rộng : Với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Bất đẳng thức giá trị tuyệt đối

a) $|a + b| \leq |a| + |b|$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

b) $|a - b| \leq |a| - |b|$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

3. Bất đẳng thức Bunhiacôpxki

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Dùng phép biến đổi tương đương : $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$
2. Dùng phương pháp phản chứng.
3. Dùng các tính chất của bất đẳng thức.
4. Dùng bất đẳng thức trong tam giác.
5. Dùng bất đẳng thức Côsi.
6. Dùng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối.
7. Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki hoặc một số bất đẳng thức khác.

B. BÀI TẬP

Bài 116. Chứng minh bất đẳng thức : $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Hướng dẫn : Xét hiệu $(ac + bd)^2 - (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Bài 117. Chứng minh rằng không tồn tại một tam giác có độ dài ba đường cao là 1; $\sqrt{3}$ và $\sqrt{3} + 1$ (cùng đơn vị đo).

Hướng dẫn : Dùng phương pháp phản chứng để chứng minh.

Bài 118. Cho $a + b = 2$, chứng minh rằng : $a^2 + b^2 \geq 2$.

Hướng dẫn : Sử dụng bất đẳng thức : $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2$.

Bài 119. Cho ba số $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ thỏa mãn : $0 \leq \sqrt{a} \leq 1$; $0 \leq \sqrt{b} \leq 1$; $0 \leq \sqrt{c} \leq 1$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$. Chứng minh : $a + b + c \leq 2$.

Hướng dẫn : Sử dụng tính chất bất đẳng thức.

Bài 120. Cho a và b là các số dương.

Chứng minh rằng : $a + b \geq \dfrac{4ab}{1 + ab}$.

Hướng dẫn : Sử dụng bất đẳng thức Côsi.

Bài 121. Cho hai số a và b thỏa mãn : $3a + 2b = 5$.

Chứng minh rằng : $3a^2 + 2b^2 \geq 5$.

Hướng dẫn : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

Bài 122. Cho ba số a, b, c thỏa mãn : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng : $2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) + abc > 0$.

Hướng dẫn : Sử dụng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối, vì :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Suy ra : $|a| \le 1$; $|b| \le 1$; $|c| \le 1$

$\Rightarrow \quad (1 + a)(1 + b)(1 + c) \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \ge 0$

Và dùng hằng đẳng thức :

$(a + b + c + 1)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2ab + 2bc + 2ca + 2a + 2b + 2c$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bài 123. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì ta có : $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Hướng dẫn : Sử dụng bất đẳng thức tam giác.

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1. Bất phương trình

* Định nghĩa : Bất phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng : $f(x) < g(x)$ $(f(x) \le g(x))$

Trong đó f(x) và g(x) là những biểu thức của x.

* Nghiệm của bất phương trình :

Giá trị $x_0 \in R$ thỏa mãn $f(x_0) < g(x_0)$ $(f(x_0) \le g(x_0))$ là một mệnh đề đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình.

2. Hệ bất phương trình một ẩn

Hệ bất phương trình ẩn x gồm một số phương trình ẩn x mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng.

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

A. PHƯƠNG PHÁP

Dùng phương pháp biến đổi tương đương hai bất phương trình hoặc hai hệ bất phương trình.

- $P(x) < Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad P(x) + F(x) < Q(x) + F(x)$

- Chuyển vế : $P(x) < Q(x) + f(x) \Leftrightarrow P(x) - f(x) < Q(x)$
- $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) < Q(x).f(x)$ nếu $f(x) > 0$

  $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) > Q(x).f(x)$ nếu $f(x) < 0$ với $\forall x$.
- Bình phương : $P(x) < Q(x)$

  $\Rightarrow P^2(x) < Q^2(x)$ nếu $P(x) > 0$ và $Q(x) > 0$ với $\forall x$.

Chú ý :

1. Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình thì điều kiện của bất phương trình có thể bị thay đổi. Vì vậy để tìm nghiệm của một bất phương trình ta phải tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.
2. Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình $P(x) < Q(x)$ với biểu thức $f(x)$ ta cần lưu ý đến điều kiện về dấu của $f(x)$.
3. Khi giải bất phương trình $P(x) < Q(x)$ mà phải bình phương hai vế thì ta lần lượt xét hai trường hợp :

   * $P(x)$, $Q(x)$ cùng có giá trị không âm ta bình phương hai vế bất phương trình.

   * $P(x)$, $Q(x)$ cùng có giá trị âm ta viết :

   $$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow -Q(x) > -P(x)$$

   rồi bình phương hai vế bất phương trình mới.

B. BÀI TẬP

Bài 124. Tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của mỗi bất phương trình sau :

a) $\dfrac{1}{x-1} - 1 < \dfrac{1}{x+2}$ b) $\dfrac{x}{x^2-1} \geq \dfrac{1}{x^2+2x-3}$

c) $\sqrt{x-1} < 2x$ d) $3\sqrt{2-x} \geq 2x + \dfrac{1}{x+5}$.

Hướng dẫn : Chú ý mẫu thức và biểu thức dưới dấu căn bậc hai.

Bài 125. Chứng tỏ bất phương trình sau vô nghiệm : $4x^2 - 4x - 3 < 0$.

Bài 126. Giải bất phương trình :

a) $|x-4| < 3$ b) $2|x| + |x-1| < 5$.

Bài 127. Giải bất phương trình :

a) $\frac{2x+1}{3}+\frac{x-2}{4}<\frac{1-3x}{5}$

b) $\frac{x}{x-3}+\frac{x+3}{x}>2.$

Bài 128. Giải và biện luận bất phương trình :

a) $mx+3\le 2x+m$

b) $x+\frac{x-1}{n}>\frac{x+1}{n}-(n+1)x$ với $n\neq 0.$

Bài 129. Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases}4x+1\ge 3x+7\\4x+5>2x+21.\end{cases}$

Bài 130. Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases}3x+5\ge x-1\\(x+2)^2\le (x-1)^2+9.\end{cases}$

III. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$.

A. PHƯƠNG PHÁP

– Dùng bảng xét dấu nhị thức $f(x) = ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a

– Xét dấu : tích, thương các nhị thức bậc nhất.

Khi f(x) là tích (hoặc thương) của những nhị thức bậc nhất ta lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức bậc nhất có mặt trong f(x), từ đó suy ra dấu của f(x).

B. BÀI TẬP

Bài 131. Giải bất phương trình :

a) $(x - 3)(2x + 5) > 0$ b) $|3x + 4| \leq 5$

c) $|2x - 1| \leq x + 3$.

Hướng dẫn : Dùng bảng xét dấu.

Bài 132. Xét dấu các biểu thức :

a) $f(x) = (x + 3)(x - 2)(x + 4)$

b) $g(x) = \dfrac{x - 2}{x + 3}$ c) $h(x) = \dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{3}{x + 2}$.

Bài 133. Giải bất phương trình :

a) $\dfrac{5}{3 - x} < 2$ b) $\dfrac{x^2 + x - 7}{x^2 - 9} > 1$.

Bài 134. Giải bất phương trình :

a) $\dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 3} > 0$ b) $|2x - 3| > -1$.

IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là :

$ax + by \leq c$ hoặc $ax + by \geq c$; $ax + by < c$; $ax + by > c$

trong đó $a, b, c \in \mathbf{R}$, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

A. PHƯƠNG PHÁP

- *Bước 1* : Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng $\Delta : ax + by = c$.
- *Bước 2* : Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc Δ (ta thường lấy gốc tọa độ O).
- *Bước 3* : Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c.
- *Bước 4* : Kết luận :
  - Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + b \leq c$.
  - Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là nghiệm của $ax + by \leq c$.

Chú ý : Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.

I. BÀI TẬP

Bài 135. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn : $x + 2y \leq 4$.

Hướng dẫn : Sử dụng phương pháp giải.

Bài 136. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn : $-3x + 2y < 0$.

Hướng dẫn : Tương tự bài 135.

Bài 137. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình :

$$-x + 3 - 2(y + 1) < 2(3 - x).$$

Bài 138. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình :

$$2x - 3(y + 2) \geq x + 1.$$

V. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{trong đó } a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0.$$

2. Dấu của tam thức bậc hai

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ và $\Delta = b^2 - 4ac$

* Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbf{R}$.

* Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a trừ khi $x = \dfrac{-b}{2a}$.

* Nếu $\Delta > 0$ thì :

+ $f(x)$ cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$

+ $f(x)$ trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$

trong đó x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của $f(x)$.

Chú ý : Nếu tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có hệ số b chẵn ta dùng biệt thức : $\Delta' = b'^2 - ac$.

A. PHƯƠNG PHÁP

- Lập $\Delta = b^2 - 4ac$ hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$ (khi b chẵn)
- Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để kết luận.

B. BÀI TẬP

Bài 139. Xét dấu tam thức bậc hai :

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

b) $f(x) = -4x^2 + 4x + 3$.

Bài 140. Lập bảng xét dấu của tam thức : $f(x) = 3x^2 - 4x - 7$.

Bài 141. Xét dấu biểu thức : $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 1}$.

Bài 142. Giải bất phương trình : $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 7x + 10} \geq 0$.

Bài 143. Tìm giá trị của m để các phương trình sau đây vô nghiệm :

a) $(m + 1)x^2 + 3x + m - 1 = 0$

b) $(-m + 3)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0$.

Chương 5. THỐNG KÊ

Dạng 1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

1. Bảng số liệu thống kê

Các số liệu được ghi lại trong một bảng gọi là bảng số liệu thống kê ban đầu.

2. Dấu hiệu (biến lượng)

- Vấn đề hay hiện tượng mà người điều tra cần quan tâm tìm hiểu là dấu hiệu.

  Dấu hiệu được kí hiệu bằng chữ in hoa X, Y, ...

- Ứng với mỗi đơn vị điều tra có một số liệu, số liệu đó được gọi là một giá trị của dấu hiệu.
- Số các giá trị không nhất thiết khác nhau của dấu hiệu đúng bằng số các đơn vị điều tra.

3. Tần số

Số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy giá trị của dấu hiệu được gọi là tần số của giá trị đó.

4. Tần suất

Tỉ số giữa tần số của mỗi giá trị với tổng n các phần tử cần điều tra gọi là tần suất của giá trị đó.

5. Bảng phân bố tần số và tần suất

Các giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
x_1	n_1	$\frac{n_1}{n}$
x_2	n_2	$\frac{n_2}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_r	n_r	$\frac{n_r}{n}$
Cộng	n	100(%)

– Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp :

Khi bảng số liệu thu thập có nhiều giá trị khác nhau, khoảng cách giữa các giá trị không bằng nhau và độ khác nhau rất ít, do đó người ta thường ghép các số liệu gần nhau thành một lớp và lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp được đơn giản và thuận lợi hơn.

A. PHƯƠNG PHÁP

Từ bảng số liệu thống kê ban đầu, lập bảng phân bố tần số, tần suất dựa vào cơ sở :

– Phép đếm.

– Công thức : $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$ và $f_i = \frac{n_i}{n}$ (ghi dưới dạng %)

B. BÀI TẬP

Bài 144. Cho bảng số liệu thống kê ban đầu điều tra về số cây trồng được của khối lớp 10.

Lớp	Số cây trồng được
10A	60
10B	64
10C	64
10D	68

Lớp	Số cây trồng được
10E	64
10G	68
10H	60
10I	68

Lập bảng phân bố tần số và tần suất.

Bài 145. Điều tra về số con của mỗi gia đình ở một tổ dân phố cho bởi bảng sau :

2	1	3	2	4	2	1	1	2	1
3	4	2	1	2	2	3	4	1	2
1	3	2	2	3	1	2	2	1	2

a) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là bao nhiêu ?

b) Lập bảng phân bố tần số và tần suất.

c) Số gia đình có từ 1 đến 2 con chiếm bao nhiêu phần trăm ?

Bài 146. Cho bảng số liệu thống kê về khối lượng của 30 gói chè (tính bằng gam) :

50	49	49	50	51	50	49	49	50	49
49	50	50	50	51	48	51	50	50	48
50	51	50	50	49	50	49	48	50	50

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất.

b) Trong 30 gói chè được khảo sát, những gói chè có khối lượng từ 49 gam đến 50 gam chiếm bao nhiêu phần trăm ?

Bài 147. Cho bảng số liệu thống kê về thời gian hoàn thành một sản phẩm của một tổ công nhân (tính bằng phút) :

40	41	40	42	44	45	40	41	42	41
45	44	40	40	42	44	45	40	42	42
42	42	44	40	41	42	40	42	44	42

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất.

b) Trong 30 công nhân được khảo sát, những công nhân có thời gian hoàn thành một sản phẩm từ 40 phút đến 42 phút chiếm bao nhiêu phần trăm ?

Bài 148. Chiều cao (tính bằng xen-ti-mét) của 40 học sinh lớp 10 được cho bởi bảng sau :

162	160	158	166	162	160	166	159	164	162
159	160	161	162	160	165	164	166	158	159
160	161	162	166	159	158	166	165	164	161
158	159	165	159	162	163	164	165	160	160

a) Với các lớp [158; 161), [161; 164), [164; 166]. Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp.

b) Trong 40 học sinh, những học sinh có chiều cao từ 161cm đến 163cm chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm ?

Dạng 2. BIỂU ĐỒ

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Biểu đồ tần suất hình cột

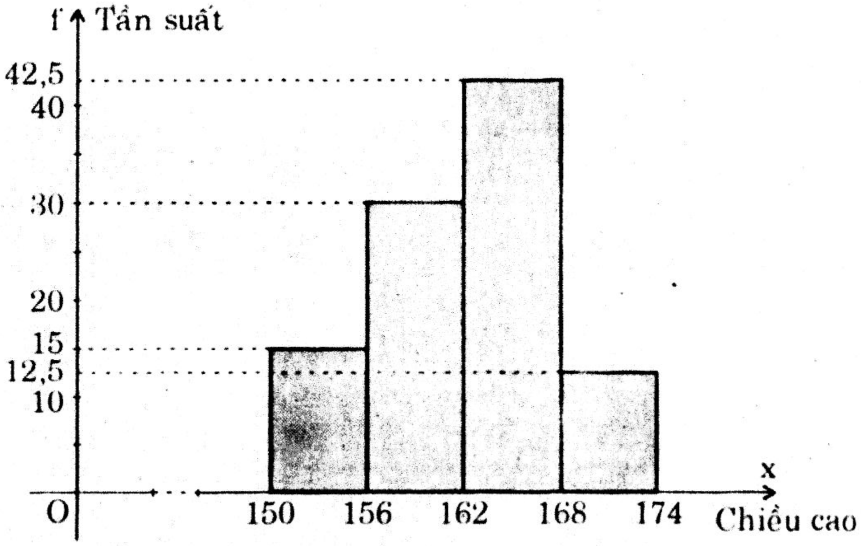
Cách vẽ : Chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxf trong đó trục Ox biểu thị các giá trị của dấu hiệu, trục Of biểu thị tần suất (có đơn vị 1%).

Chú ý : Để đồ thị được cân đối, đôi khi phải cắt bỏ một đoạn nào đó của trục hoành (hoặc trục tung).

Ví dụ : Cho bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp về chiều cao của 40 học sinh (tính bằng xentimet).

Lớp số đo chiều cao (cm)	Tần số	Tần suất (%)
[150 – 156)	6	15
[156 – 162)	12	30
[162 – 168)	17	42,5
[168 – 174]	5	12,5
Cộng	40	100(%)

Vẽ biểu đồ tần suất hình cột :



2. Biểu đồ đường gấp khúc tần suất

Cũng có thể mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp bằng cách vẽ đường gấp khúc tần suất như sau :

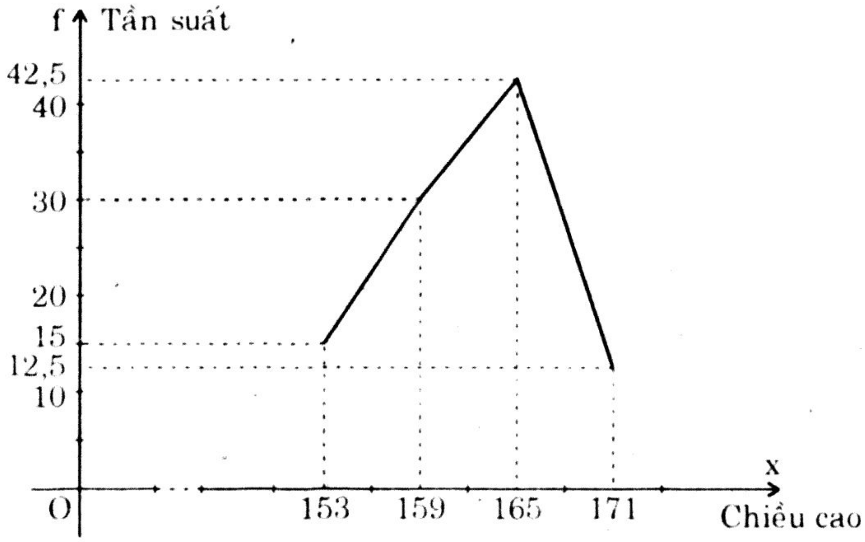
– Trên mặt phẳng tọa độ Oxf xác định các điểm $(c_i; f_i)$, i = 1; 2;3; ...; k.

Trong đó : c_i là trung bình cộng của hai mút lớp thứ i;

f_i là tần suất của các lớp trong bảng phân bố.

– Vẽ các đoạn thẳng nối các điểm $(c_i; f_i)$ ta được biểu đồ đường gấp khúc.

Ví dụ : Vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất ở ví dụ về chiều cao của 40 học sinh.



Chú ý **:** Cách vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần số cũng tương tự trong đó thay trục tần suất bởi trục tần số.

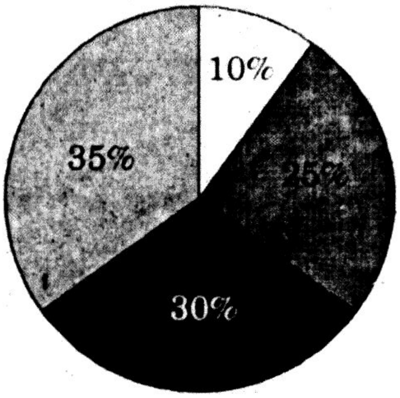
3. Biểu đồ hình quạt

Ta có thể biểu diễn bảng phân bố tần suất dưới dạng hình quạt.

Ví dụ : Điều tra về mức độ tiêu thụ điện năng trên một tháng của 20 gia đình ở một tổ dân phố cho bởi bảng tần số và tần suất sau (tính theo kWh)

70	75	70	80	75	75	80	70	70	85
85	70	75	80	70	75	70	80	80	75

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
(1) $x_1 = 70$	7	35
(2) $x_2 = 75$	6	30
(3) $x_3 = 80$	5	25
(4) $x_4 = 85$	2	10
Cộng	20	100(%)



B. BÀI TẬP

Bài 149. Tuổi nghề (tính theo năm) của 30 công nhân ở một xí nghiệp được cho bởi bảng sau :

5	7	6	5	8	8	10	9	9	8
7	8	7	6	5	7	8	10	9	7
6	5	7	8	9	10	8	7	5	8

a) Lập bảng phân bố tần số, tần suất.

b) Vẽ biểu đồ gấp khúc tần số.

c) Vẽ biểu đồ gấp khúc tần suất.

Bài 150. Tổng kết Hội khỏe Phù Đổng ở tỉnh A số giải đạt được ở mỗi đơn vị được cho bởi bảng phân bố tần số và tần suất như sau :

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
(1) $x_1 = 4$	1	10
(2) $x_2 = 5$	3	30
(3) $x_3 = 6$	2	20
(4) $x_4 = 7$	3	30
(5) $x_5 = 8$	1	10
Cộng	10	100(%)

a) Vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tần suất.

Bài 151. Theo thống kê dân số của nước ta qua một số năm như sau :

Năm 1980 : 54 triệu dân

Năm 1990 : 67 triệu dân

Năm 1999 : 76 triệu dân

Năm 2007 : 80 triệu dân

Dựng biểu đồ hình chữ nhật (cột) về dân số ở Việt Nam qua các thời điểm trên.

Bài 152. Kết quả phân loại học tập của học sinh khối lớp 10 ở một trường THPT được cho bởi bảng sau :

Loại	Giỏi	Khá	Trung bình	Yếu	Kém
Tỉ lệ %	10	30	45	10	5

Dựng biểu đồ hình quạt biểu diễn kết quả phân loại học tập của học sinh khối lớp 10.

Dạng 3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG – SỐ TRUNG VỊ – MỐT

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Tìm số trung bình cộng

Cách 1 : Sử dụng bảng phân bố tần số :

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + \ldots + x_kn_k}{n}$$

Cách 2 : Sử dụng bảng phân bố tần suất :

$$\overline{X} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k$$

Chú ý : Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp :

$$\overline{X} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \ldots + n_kc_k}{n}$$

trong đó c_i là giá trị đại diện (trung bình cộng của hai mút của lớp thứ i)

Hoặc : $\overline{X} = f_1c_1 + f_2c_2 + \ldots + f_kc_k$

2. Số trung vị

- Khi các số liệu thống kê có sự chênh lệch quá lớn thì số trung bình cộng không thể là đại diện cho các số liệu đó. Khi đó ta chọn đặc trưng khác đại diện thích hợp hơn đó là số trung vị.
- Cách tìm số trung vị : Sắp thứ tự các số liệu thống kê thành dãy không giảm (hoặc không tăng). Số trung vị kí hiệu là M_e là số đứng giữa dãy nếu số phần tử là lẻ và trung bình cộng của hai số đứng giữa nếu số phần tử là chẵn.

3. Mốt

Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_0.

B. BÀI TẬP

Bài 153. Cho bảng phân bố tần số và tần suất như sau :

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
5	4	22,2
6	7	38,9
7	2	11,1
8	1	5,6
9	2	11,1
10	2	11,1
Cộng	n = 18	100(%)

a) Tìm số trung bình cộng.

b) Tìm M_0.

Bài 154. Điều tra năng suất lúa của một số tỉnh, thành thu thập như sau :

STT	Tỉnh, thành	Năng suất (tạ/ha)
1	Khánh Hòa	50
2	Phú Yên	46
3	Bình Định	44
4	Quảng Ngãi	48
5	Đà Nẵng	48

a) Lập bảng phân bố tần số, tần suất.

b) Tìm giá trị trung bình cộng của dấu hiệu.

Bài 155. Cho bảng phân bố tần số :

Giá trị x	1	3	5	99	2009	
Tần số n	5	7	5	2	1	n = 20

a) Tìm số trung bình cộng.

b) Giá trị trung bình cộng có thể là đại diện của dấu hiệu trên được không ?

c) Tìm số trung vị.

Bài 156. Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp sau cho biết : Nhiệt độ trung bình trong tháng 3 tại thành phố Quảng Ngãi từ năm 1990 đến năm 2009 (20 năm).

Lớp nhiệt độ (°C)	Tần số	Tần suất (%)
[20; 22)	2	10
[22; 24)	3	15
[24; 26)	10	50
[26; 28]	5	25
Cộng	20	100(%)

Hãy tính số trung bình cộng.

Bài 157. Kết quả điều tra về số con của 50 gia đình được cho bởi bảng sau :

3	2	1	0	2	4	3	2	0	1
2	2	3	2	1	0	1	2	2	1
3	2	2	1	2	2	2	1	3	1
2	2	3	4	0	1	1	2	2	3
4	2	2	2	1	0	1	1	2	2

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất.

b) Nêu nhận xét về số con của 50 gia đình được điều tra.

c) Tính số trung bình cộng.

d) Tìm số trung vị, mốt của các số liệu thống kê.

Dạng 4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

A. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng công thức tính phương sai có ba cách :

- *Cách 1* : Tính theo tần số :

$$\delta_x^2 = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_k(x_k - \overline{x})^2}{n}$$

Áp dụng cho bảng phân bố tần số ghép lớp)

– *Cách 2* : Tính theo tần suất :

$$\delta_x^2 = f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + \dots + f_k(x_k - \overline{x})^2$$

(Áp dụng cho bảng phân bố tần suất ghép lớp)

– *Cách 3* : Sử dụng công thức : $\delta_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$

Trong đó : $\overline{x^2}$ là trung bình cộng của các bình phương số liệu thống kê nghĩa là :

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_kx_k^2)$$

* Độ lệch chuẩn : là căn bậc hai của phương sai $\delta_x = \sqrt{\delta_x^2}$.

Chú ý : Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị đo với phương sai.

B. BÀI TẬP

Bài 158. Hai lớp 10A và 10B của một trường THPT đồng thời làm bài thi môn Toán theo cùng một đề thi. Kết quả thi được trình bày ở hai bảng phân bố tần số như sau :

Điểm thi Toán của lớp 10A :

Điểm	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	2	5	4	12	13	3	1	40

Điểm thi Toán của lớp 10B :

Điểm	4	5	6	7	8	9	Cộng
Tần số	3	1	5	18	8	5	40

a) Tính các số trung bình cộng, phương sai, độ lệch chuẩn của các bảng phân bố tần số đã cho.

b) Xét xem bài thi môn Toán ở lớp nào đồng đều hơn ?

Bài 159. Cho hai bảng tần số ghép lớp :

Khối lượng (tính theo kilôgam) của nhóm cá thứ nhất.

Lớp khối lượng	[0,8; 1)	[1; 1,2)	[1,2; 1,4)	[1,4; 1,6)	[1,6; 1,8)]	Cộng
Tần số	6	8	8	7	1	30

Khối lượng (tính theo kilôgam) của nhóm cá thứ hai.

Lớp khối lượng	[0,8; 1)	[1; 1,2)	[1,2; 1,4)	[1,4; 1,6)	[1,6; 1,8)]	Cộng
Tần số	12	2	4	9	3	30

a) Tính các số trung bình cộng của các bảng phân bố tần số ghép lớp.

b) Tính phương sai của các bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

c) Xét xem nhóm cá nào có khối lượng đồng đều hơn.

Bài 160. Cho bảng phân bố tần số về tuổi nghề của 150 công nhân trong một xí nghiệp.

Tuổi	10	12	14	15	16	17	20	Cộng
Tần số	20	50	30	15	18	7	10	150

a) Tính số trung bình cộng của bảng phân bố tần số; tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số đã cho.

b) Tìm số trung vị.

Bài 161. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp về thành tích nhảy xa của 40 học sinh lớp 10A ở một trường THPT như sau :

Lớp thành tích	Tần số
[2,2; 2,4)	5
[2,4; 2,6)	12
[2,6; 2,8)	20
[2,8; 3,0]	3
Cộng	40

a) Tính số trung bình cộng của các số liệu thống kê đã cho. Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

b) Biết thành tích nhảy xa của lớp 10B có số trung bình cộng là 2,605m, phương sai là 0,3. Hãy so sánh thành tích nhảy xa của hai lớp 10A và 10B.

Bài 162. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp về khối lượng của 100 con lợn khi xuất chuồng ở một trại chăn nuôi.

Lớp khối lượng (kg)	Tần số
[50; 60)	15
[60; 70)	25
[70; 80)	35
[80; 90)	10
[90; 100]	15
Cộng	100

a) Hãy lập bảng tần suất ghép lớp.

b) Từ bảng phân bố tần số ghép lớp cho biết số lợn khi xuất chuồng có khối lượng từ 70kg trở lên chiếm bao nhiêu phần trăm ?

c) Tính số trung bình cộng, phương sai, độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê đã cho.

Chương 6. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

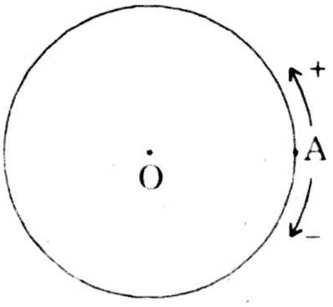
Dạng 1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC

1. **Đường tròn định hướng và cung lượng giác**

Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.

Trên đường tròn định hướng lấy hai điểm A và B, một điểm M di động trên đường tròn đó theo một chiều (hoặc âm hoặc dương) từ A đến B tạo thành một cung lượng giác có điểm đầu A và điểm cuối B.

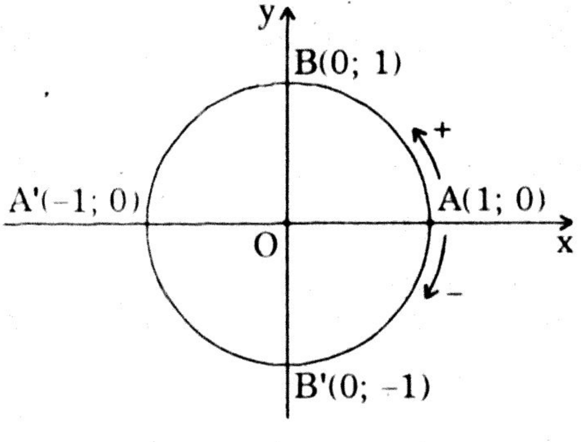


2. **Góc lượng giác**

Trên đường tròn định hướng cho một cung lượng giác $\overset{\frown}{CD}$. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C tới D tạo nên một cung lượng giác $\overset{\frown}{CD}$. Khi đó tia OM quay quanh gốc O từ vị trí OC đến vị trí OD. Ta nói tia OM tạo ra một góc lượng giác có tia đầu là OC và tia cuối là OD. Kí hiệu góc lượng giác đó là (OC, OD).

3. **Đường tròn lượng giác**

Trong mặt phẳng Oxy vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính R = 1, đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm A(1; 0), A'(−1; 0), B(0; 1), B(0; −1).



Ta lấy A(1; 0) làm điểm gốc của đường tròn đó. Đường tròn xác định như trên gọi là đường tròn lượng giác gốc A.

4. Độ và radian (rad)

a) *Đơn vị radian*

Ngoài đơn vị độ được sử dụng để đo góc người ta còn dùng một đơn vị mới nữa để đo góc và cung đó là radian.

Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1rad.

b) *Quan hệ giữa độ và rad*

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{rad}$$

$$1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Với $\pi = 3{,}14$ thì $1^\circ \approx 0{,}01745\text{rad}$ và $1\text{rad} \approx 57^\circ 17' 45''$

Chú ý : Khi viết số đo của một góc (cung) theo đơn vị rad người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn cung $\frac{\pi}{3}$ được hiểu là cung $\frac{\pi}{3}$rad.

Bảng chuyển đổi thông dụng :

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Rad	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

5. Số đo của một cung lượng giác

Số đo của một cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π. Ta viết : $\text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

6. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Chọn điểm gốc A(1; 0) làm điểm đầu của tất cả cung lượng giác trên đường tròn lượng giác.

Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác ta cần chọn điểm cuối M của cung này. Điểm cuối M được xác định bởi hệ thức $\text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

B. BÀI TẬP

Bài 163. Đổi số đo độ của các góc ra số đo rad.

a) 20° b) 55° c) -35° d) $-125^\circ30'$.

Hướng dẫn : Sử dụng công thức về quan hệ giữa độ và rad.

Bài 164. Đổi số đo rad của các cung sau đây ra độ, phút, giây.

a) $\frac{\pi}{36}$ b) $\frac{3\pi}{16}$. c) $\frac{2\pi}{9}$ d) $\frac{-3}{4}$ rad.

Bài 165. Một đường tròn có bán kính 15cm. Tìm độ dài các cung tròn trên đường tròn đó có số đo :

a) $\frac{\pi}{10}$ b) 0,5 c) 35°.

Hướng dẫn : Dùng công thức $l = R.\alpha$ hoặc $l = \frac{\pi Ra}{180}$.

Bài 166. Trên đường tròn lượng giác hãy biểu diễn các cung có số đo :

a) 120° b) -120° c) $\frac{-3\pi}{4}$ d) $\frac{7\pi}{3}$.

Bài 167. Trên một đường tròn lượng giác gốc A, xác định các điểm N khác nhau biết rằng cung $\overset{\frown}{AN}$ có số đo tương ứng là :

a) $\frac{k\pi}{4}$ b) $\frac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Dạng 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A. KIẾN THỨC

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CUNG α

1. Định nghĩa

Trên một đường tròn lượng giác cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ$\overset{\frown}{AM} = \alpha$

$$\sin\alpha = \overline{OK}; \qquad \cos\alpha = \overline{OH}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z})$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq k\pi; k \in \mathbf{Z})$$

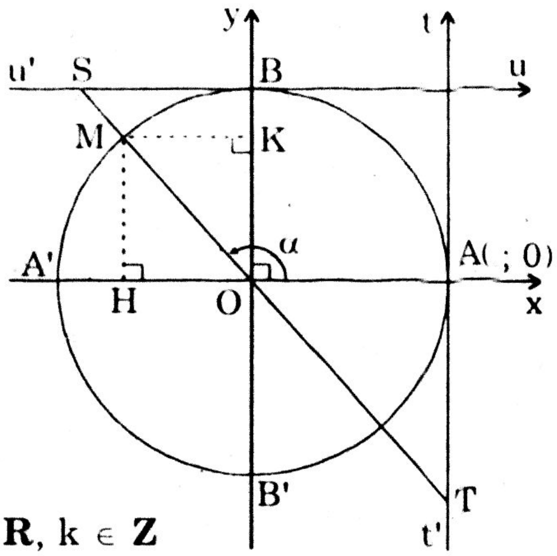
Các giá trị sinα, cosα, tanα, cotα được gọi là các giá trị lượng giác của cung α.

Trục hoành : trục cos

Trục tung : trục sin

At : là trục tang

Bu : là trục cotang.



2. Hệ quả

a) $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$ với $\forall\alpha \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}$

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$ với $\forall\alpha \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}$

b) $\tan\alpha = \tan(\alpha + k\pi)$ với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

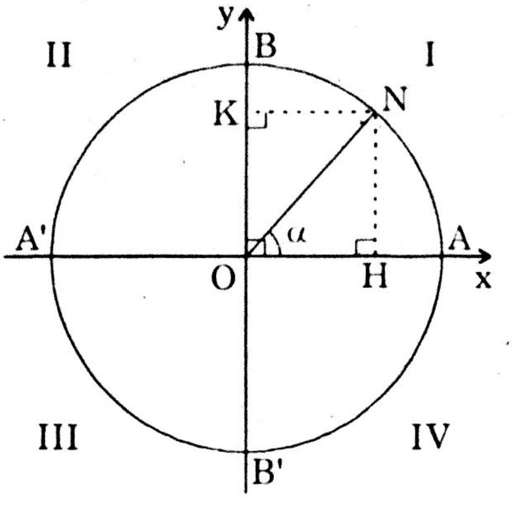
$\cot\alpha = \cot(\alpha + k\pi)$ với $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

d) Dấu của các giá trị lượng giác của góc α phụ thuộc vào điểm cuối N của cung $\overset{\frown}{AN} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác.

Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác :

Phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
sinα	+	+	−	−
cosα	+	−	−	+
tanα	+	−	+	−
cotα	+	−	+	−



II. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

1. Công thức lượng giác cơ bản

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right)$

c) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $\quad(\alpha \neq k\pi;\ k \in \mathbf{Z})$

d) $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$ $\quad\left(\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z}\right)$

2. Giá trị lượng giác của cung liên kết đặc biệt

a) Cung đối nhau : α và $-\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

b) Cung bù nhau : α và $\pi - \alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

c) Cung hơn kém nhau π : α và $(\alpha + \pi)$

$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$ $\qquad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$ $\qquad \cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$

d) Cung phụ nhau : α và $\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ $\qquad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$ $\qquad \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$

B. BÀI TẬP

Bài 168. Có cung α nào mà $\cos\alpha$ nhận các giá trị tương ứng sau đây không ?

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{4}{3}$ d) $-1,1$.

Hướng dẫn : Chú ý : $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

Bài 169. Biết $\sin\alpha = -0,5$. Tính :

a) $\cot\alpha$ b) $\tan\alpha$.

Bài 170. Biết $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$. Tính :

a) $\cos\alpha$ b) $\sin\alpha$.

Bài 171. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Xác định dấu của giá trị lượng giác :

a) $\sin(\alpha - \pi)$ b) $\tan(\alpha + \pi)$.

Bài 172. Tính giá trị lượng giác của góc α nếu :

a) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ b) $\cos\alpha = -0,5$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha <$

c) $\tan\alpha = 1$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ d) $\cot\alpha = -2$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2$

Bài 173. Tính α, biết :

a) $\sin\alpha = -1$ b) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

c) $\sin\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 174. Chứng minh rằng :

a) $\sin(270^\circ + \alpha) = \sin(270^\circ - \alpha)$

b) $\cos(270^\circ + \alpha) = -\cos(270^\circ - \alpha)$.

Bài 175. Với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Chứng minh rằng : $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

Bài 176. Chứng minh :

a) $\frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1}$

b) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Dạng 3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC

1. Công thức cộng

$$\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

2. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a + b}{2}\cos\frac{a - b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a + b}{2}\sin\frac{a - b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a + b}{2}\cos\frac{a + b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a + b}{2}\sin\frac{a - b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a + b)}{\cos a\cos b}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a - b)}{\cos a\cos b}.$$

B. BÀI TẬP

Bài 177. Tính :

a $\sin 25^\circ$; $\cos 150^\circ$; $\tan 120^\circ$; $\cot(-30^\circ)$

b) $\sin\frac{5\pi}{2}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $\tan\frac{2\pi}{3}$; $\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Bài 178. Tính :

a) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ biết $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

b) $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ biết $\cos\alpha = \frac{-1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

c) $\cos(\alpha+\beta)$; $\sin(\alpha-\beta)$

biết $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\sin\beta = \frac{3}{5}$ $(90^\circ < \beta < 180^\circ)$.

Bài 179. Tính $\sin2\alpha$; $\cos2\alpha$; $\tan2\alpha$, biết :

a) $\sin\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Bài 180. Biến đổi thành tích các biểu thức :

a) $1 - \cos\alpha$

b) $1 + \cos\alpha$

c) $1 - 2\cos\alpha$

d) $1 + 2\sin\alpha$.

Bài 181. Rút gọn biểu thức :

a) $\sin(\alpha+\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).\sin\beta$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \cos(\alpha-\beta)$.

Bài 182. Chứng minh :

a) $\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ = \sin10^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$

b) $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 183. Biết $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính :

a) $\sin2\alpha$; $\cos2\alpha$; $\tan2\alpha$; $\cot2\alpha$

b) $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\tan\frac{\alpha}{2}$; $\cot\frac{\alpha}{2}$.

Bài 184. Rút gọn biểu thức :

a) $M = \dfrac{\cos\alpha + \cos3\alpha + \cos5\alpha}{\sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha}$

b) $\dfrac{\sin3\alpha - \sin5\alpha}{2\cos4\alpha}$.

Bài 185. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào α.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sqrt{2}\cos\alpha.$$

Bài 186. Tính giá trị của biểu thức :

$$A = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$$

biết $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3}$ và $\cos\alpha \neq \cos\beta$.

Bài 187. Biết $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức :

$$B = \frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha + 2\cos^3\alpha}.$$

BÀI GIẢI

Chương 1. MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP

Dạng 1. Mệnh đề – Mệnh đề chứa biến

Bài 1. Phát biểu b) và c) là các mệnh đề.

Bài 2. Khoanh vào C.

Bài 3. a) Đ b) S c) Đ d) S.

Bài 4.

a) Có ba số mà lập phương của chúng bằng chính nó là mệnh đề đúng.

b) Khẳng định $x + 5 = 7$ là mệnh đề chứa biến.

c) Khẳng định $x^2 + x > 0$ là mệnh đề chứa biến.

d) Tam giác cân có một góc bằng 60° là tam giác đều là mệnh đề đúng.

Bài 5.

a) Ta có : $-x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \sqrt{5} = 0 \\ x - \sqrt{5} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy với $x = -\sqrt{5}$; $x = \sqrt{5}$ thì mệnh đề chứa biến $-x^2 + 5 = 0$ trở thành một mệnh đề đúng.

b) $7 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{7})^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{7} + x)(\sqrt{7} - x) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{7} + x > 0;\ \sqrt{7} - x > 0 \\ \sqrt{7} + x < 0;\ \sqrt{7} - x < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -\sqrt{7};\ x < \sqrt{7} \\ x < -\sqrt{7};\ x > \sqrt{7} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$$

Vậy với $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$ thì mệnh đề chứa biến $7 - x^2 > 0$ trở thành một mệnh đề đúng.

Dạng 2. Các phép toán về mệnh đề

Bài 6.

a) A : "Số 1001 là số nguyên tố"

$\overline{A}$: "Số 1001 không phải là số nguyên tố"

A là mệnh đề sai; $\overline{A}$ là mệnh đề đúng.

b) B : "14 không chia hết cho 3"

$\overline{B}$: "14 chia hết cho 3"

B là mệnh đề đúng; $\overline{B}$ là mệnh đề sai.

c) C : "Số π là số vô tỉ"

$\overline{C}$: "Số π không phải là số vô tỉ"

C là mệnh đề đúng; $\overline{C}$ là mệnh đề sai.

d) D : "$|-2006| \leq 0$"

$\overline{D}$: "$|-2006| > 0$"

D là mệnh đề sai; $\overline{D}$ là mệnh đề đúng.

Bài 7.

a) M : "$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$" là mệnh đề đúng.

$\overline{M}$: "$(a + b)(a - b) \neq a^2 - b^2$" là mệnh đề sai.

b) N : "$\sqrt{2007} - \sqrt{2006} = \dfrac{1}{\sqrt{2007} + \sqrt{2006}}$" là mệnh đề đúng.

$\overline{N}$: "$\sqrt{2007} - \sqrt{2006} \neq \dfrac{1}{\sqrt{2007} + \sqrt{2006}}$" là mệnh đề sai.

c) P : "$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ không phải là số chính phương" là mệnh đề sai.

$\overline{P}$: "$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ là một số chính phương" là mệnh đề đúng.

d) Q : "Phương trình $x^2 + 2x + 2 = 0$ vô nghiệm" là mệnh đề đúng.

$\overline{Q}$: "Phương trình $x^2 + 2x + 2 = 0$ có nghiệm" là mệnh đề sai.

Bài 8.

a) "Nếu $x = 3$ thì $x^2 = 9$" : mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề đảo của mệnh đề trên là : "Nếu $x^2 = 9$ thì $x = 3$", mệnh đề này sai.

Bài 9.

a) Mệnh đề đảo :

- Nếu a + b chia hết cho m thì a chia hết cho m và b chia hết cho m.
- Tam giác có các đường cao xuất phát từ ba đỉnh bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

b) • Điều kiện cần để a ⋮ m và b ⋮ m là (a + b) ⋮ m.

• Điều kiện cần để một tam giác đều là các đường cao xuất phát từ ba đỉnh bằng nhau.

c) • Điều kiện đủ để (a + b) ⋮ m là a ⋮ m và b ⋮ m.

• Để các đường cao xuất phát từ ba đỉnh của một tam giác bằng nhau, điều kiện đủ là tam giác đều.

Bài 10.

a) Mệnh đề sai, vì nếu lấy $x = -2007$ thì $|-2007| > 2006$.

Mệnh đề đúng : $\forall x \in \mathbf{R};\ |x| < 2006 \Leftrightarrow -2006 < x < 2006$.

b) Mệnh đề đúng.

c) Mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề sai, vì không có số hữu tỉ nào mà bình phương bằng 11.

Mệnh đề đúng là : $\exists x \in \mathbf{R},\ x^2 = 11$.

Bài 11. a) S b) Đ c) S d) S.

Bài 12. Khoanh vào D.

Bài 13. (1 – b); (2 – c); (3 – a); (4 – e).

Bài 14.

a) Mệnh đề phủ định : $\exists x \in \mathbf{Q};\ 9x^2 - 1 = 0$

Mệnh đề phủ định đúng.

b) Mệnh đề phủ định : $\exists x \in \mathbf{Q};\ x^2 < x$

Mệnh đề phủ định đúng.

c) Mệnh đề phủ định : $\forall x \in \mathbf{R};\ x^2 \neq \sqrt{5}x - (\sqrt{5} + 1)$

Mệnh đề phủ định sai.

d) Mệnh đề phủ định : $\forall x \in \mathbf{N}^*$, x chia hết cho x.

Mệnh đề phủ định đúng.

Dạng 3. Các phép toán chứng minh

Bài 15 Với mọi a, b không âm, ta có :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Bài 16 Ta cần chứng minh thỏa mãn hai yêu cầu : $\begin{cases} |a| \geq 0 \\ |a|^2 = a^2 \end{cases}$

Thật vậy : $|a| \geq 0$

- Khi $a \geq 0 : |a| = a \quad \Rightarrow \quad |a|^2 = a^2$
- Khi $a < 0 : |a| = -a \quad \Rightarrow \quad |a|^2 = (-a)^2 = a^2$

Vậy với mọi $a \in \mathbf{R};\ \sqrt{a^2} = |a|$.

Bài 17 Giả sử trong tam giác ABC cả ba góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ không có góc nào nhỏ hơn hoặc bằng 60°. Nghĩa là ΔABC có ba góc đều lớn hơn 60°.

Suy ra ΔABC có tổng ba góc lớn hơn 180°. Điều này vô lí.

Vậy : ΔABC có ít nhất một góc có số đo ≤ 60°.

Bài 18 Giả sử n chia hết cho 5.

Suy ra $n = 5q \quad (q \in \mathbf{Z})$

Suy ra $n^2 = (5q)^2 = 25q^2 = 5.(5q^2)$

Suy ra n^2 chia hết cho 5 (trái giả thiết).

Vậy : n^2 không chia hết cho 5 thì n cũng không chia hết cho 5.

Bài 19 Giả sử $\exists n \in N$ sao cho $n^2 + 3n + 5 \ \vdots\ 121$

Suy ra : $(n^2 + 3n + 5) \ \vdots\ 11$

$$\Rightarrow \quad (4n^2 + 12n + 20) \ \vdots\ 11 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad [(2n + 3)^2 + 11] \ \vdots\ 11$$

$$\Rightarrow \quad (2n + 3)^2 \ \vdots\ 11$$

$\Rightarrow \quad 2n + 3 \vdots 11$

$\Rightarrow \quad (2n + 3)^2 \vdots 121 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $11 \vdots 121$ (vô lí)

Vậy : $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 121 với $\forall n \in \mathbf{N}$.

Bài 20.

- Khi n = 1, ta có : Vế trái bằng 1; Vế phải : $1^2 = 1$

  Đẳng thức đúng.

- Giả sử đẳng thức đúng khi n = k

  $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

- Chứng minh đẳng thức đúng khi n = k + 1

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + 2(k + 1) - 1 &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Vậy với $n \in \mathbf{N}^*$: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Bài 21.

- Khi n = 1 : Vế trái : $\frac{2}{1.2} = 1$; Vế phải : $\frac{2.1}{(1 + 1)} = \frac{2}{2} = 1$

  Vế trái bằng vế phải, đẳng thức đúng.

- Giả sử đẳng thức đúng khi n = k

$$\frac{2}{1.2} + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \ldots + \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2k}{k+1}$$

- Ta chứng minh đẳng thức đúng khi n = k + 1

Ta có : $\frac{2}{1.2} + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \ldots + \frac{2}{k(k+1)} + \frac{2}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{2k}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+1}\left(k + \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \frac{2}{k+1}\left[\frac{k(k+2)+1}{k+2}\right]$$

$$= \frac{2}{k+1} \cdot \frac{(k+1)^2}{k+2} = \frac{2(k+1)}{k+2} = \frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

Đẳng thức đúng khi $n = k + 1$.

Vậy : $\forall n \in \mathbf{N}^* : \dfrac{2}{1.2} + \dfrac{2}{2.3} + \dfrac{2}{3.4} + \ldots + \dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{2n}{n+1}$.

Dạng 4. Tập hợp – Các phép toán trên tập hợp

Bài 22. $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

$B = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

$C. \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18\}$.

Bài 23. $M = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2k + 1;\ k \in \mathbf{N}\}$

$N = \{x^2 \mid x \in \mathbf{N}^*;\ x \le 10\}$

$P = \{x \in \mathbf{N} \mid x = n(n + 1);\ n \in \mathbf{N};\ n \le 9\}$.

Bài 24. $A = \{40; 42; 44; 46; 48; 50\}$

$B = \{40; 42; 44; 46; 48; 50\}$

Vậy $A = B$.

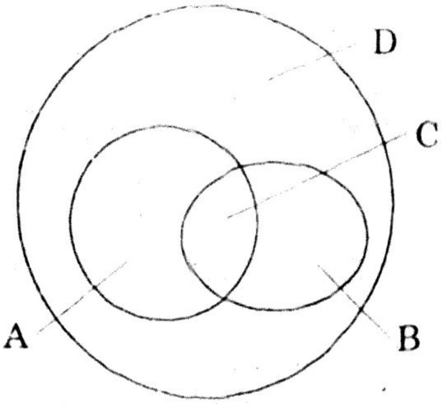
Bài 25. Số học sinh thích học Toán của trường :

$$1000.\frac{75}{100} = 750 \text{ (HS)}$$

Số học sinh thích học Văn của trường :

$$1000.\frac{60}{100} = 600 \text{ (HS)}$$

Ta có biểu đồ Ven :



A : Tập hợp các HS thích Toán.

B : Tập hợp các HS thích Văn.

C : Tập hợp các HS thích cả Toán lẫn Văn.

D : Tập hợp các HS toàn trường.

a) Gọi số học sinh thích cả hai môn Toán và Văn là x (học sinh)

Ta có : $750 - x + 600 + 50 = 1000$

$1400 - x = 1000$

$x = 1400 - 1000$

$x = 400$ (HS)

b) Vì trường còn có 50 học sinh không thích cả Văn và Toán nên ta có :

$750 - x + 600 \le 1000$

$\Leftrightarrow \quad 1350 - x \le 1000$

$\Leftrightarrow \quad x \ge 1350 - 1000$

$\Leftrightarrow \quad x \ge 350$

Vậy có ít nhất 350 HS thích cả hai môn Văn và Toán.

c) Do có 600 HS (< 750 HS) thích học Văn nên có nhiều nhất là 600 HS thích học cả hai môn Toán và Văn.

Bài 26. $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{b\}$, $M_3 = \{1\}$, $M_4 = \{2\}$

$M_5 = \{a; b\}$, $M_6 = \{a; 1\}$, $M_7 = \{a; 2\}$, $M_8 = \{1; 2\}$

$M_9 = \{b; 1\}$, $M_{10} = \{b; 2\}$, $M_{11} = \{a; b; 1\}$, $M_{12} = \{a; b; 2\}$

$M_{13} = \{a; 1; 2\}$, $M_{14} = \{b; 1; 2\}$,

$M_{15} = \{a; b; 1; 2\} = A$, $M_{16} = \varnothing \subset A$.

Có tất cả 16 tập hợp con của tập hợp A.

Bài 27.

a) $P \cap Q = \varnothing$

$P \cup Q = \{2000; 2001; 2002; 2003; 2004; 2005; 2006; 2007; 2008; 2009\}$.

b) $P \setminus Q = \{2000; 2002; 2004; 2006; 2008\} = P$

$Q \setminus P = \{2001; 2003; 2005; 2007; 2009\} = Q$.

Bài 28.

a) $M = \{1; 2; 3; 6\}$

$N = \{1; 2; 4; 8\}$

Vì $A \subset M$; $A \not\subset N$ và A là tập hợp gồm hai phần tử nên $A = \{3; 6\}$.

b) $M \cap N = \{1; 2\}$

$M \cup N = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$

$N \setminus M = \{4; 8\}$.

Bài 29. a) Đ b) Đ c) S d) Đ.

Bài 30. Khoanh vào C.

Dạng 5. Các tập hợp số

Bài 31. Điền dấu × vào câu d) : $A = (-1; 3)$.

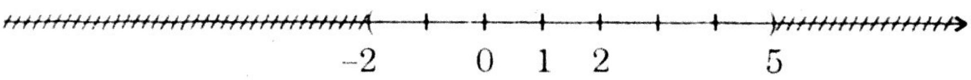
Bài 32. a) Đ b) S c) Đ d) Đ.

Bài 33. Khoanh vào D.

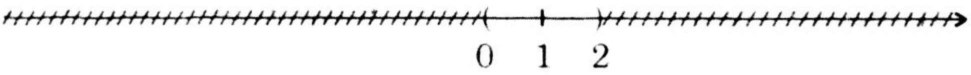
Bài 34. Khoanh vào B.

Bài 35.

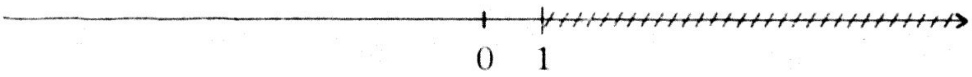
a) $(-2; 2) \cup (1; 5) = (-2; 5)$



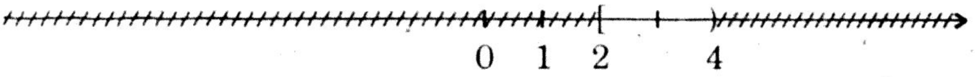
b) $(-3; 2) \cap (0; 5) = (0; 2)$



c) $\mathbf{R} \setminus (1; +\infty) = (-\infty; 1]$



d) $[-5; 4) \cap [2; 7] = [2; 4)$



Dạng 6. Số gần đúng – Sai số

Bài 36.

- Nếu lấy $\sqrt[3]{7} = 1,913$ thì :

  Vì $1,912 < \sqrt[3]{7} = 1,912931... < 1,913$

  Nên ta có : $|\sqrt[3]{7} - 1,913| < |1,912 - 1,913| = 0,001$

  Vậy sai số tuyệt đối nhỏ hơn 0,001.

- Nếu lấy $\sqrt[3]{7} = 1,9130$ thì :

Vì $1{,}9129 < \sqrt[3]{7} = 1{,}912931... < 1{,}9130$

Nên ta có : $|\sqrt[3]{7} - 1{,}9130| < |1{,}9129 - 1{,}9130| = 0{,}0001$

Vậy sai số tuyệt đối nhỏ hơn 0,0001.

Bài 37. Khoanh vào C.

Bài 38.

a) Vì $\sqrt{3}$ có 7 chữ số chắc nên :

$\sqrt{3} = 1{,}732051$

$\Delta_{\sqrt{3}} = |\sqrt{3} - 1{,}732051| < |1{,}732050 - 1{,}732051| = 0{,}000001$

Sai số tuyệt đối là 0,000001.

b) • Nếu lấy $\sqrt{3} = 1{,}73$ thì sai số tuyệt đối được ước lượng là :

$\Delta_{\sqrt{3}} = |\sqrt{3} - 1{,}73| < |1{,}732 - 1{,}73| = 0{,}002$

Số 1,73 có các chữ số đều chắc.

• Nếu lấy $\sqrt{3} = 1{,}73210$ thì sai số tuyệt đối được ước lượng là :

$\Delta_{\sqrt{3}} = |\sqrt{3} - 1{,}73210| < |1{,}73205 - 1{,}73210| = 0{,}00005$

Số 1,73210 có các chữ số hàng phần vạn trở lên là chữ số chắc.

Bài 39.

a) Quy trình như sau : $\boxed{2}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{7}\ \boxed{\times}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{15}\ \boxed{=}$

Ấn liên tiếp phím MODE cho đến khi màn hình hiện ra :

Fix	Sci	Norm
1	2	3

Ấn $\boxed{1}\ \boxed{5}$ để lấy kết quả 5 chữ số thập phân.

Kết quả : 495,74187.

b) Quy trình :

$\boxed{(}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{Shift}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{35}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{Shift}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{52}\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{x^2}\ \boxed{=}$

Ấn $\boxed{1}\ \boxed{5}$ để lấy kết quả 5 chữ số thập phân.

Kết quả : 0,14293.

Bài 40. Số quy tròn là : 573000.

Dạng 7. Tổng hợp

Bài 41. $A = \left\{1; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \left\{1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$B = \left\{1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Vậy A = B.

Bài 42.

a) $P : \forall x \quad (x \in \mathbf{M} \Rightarrow x \in \mathbf{N})$.

b) Mệnh đề đảo là : $\forall x \ (x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in M)$.

Bài 43.

a) $\forall x \in \mathbf{R} : x^2 \geq 0$ (Đ)

Phủ định : $\exists x \in \mathbf{R} : x^2 < 0$ (S)

b) $\exists x \in \mathbf{Z} : x^3 = x$ (Đ)

Phủ định : $\forall x \in \mathbf{Z} : x^3 \neq x$ (S)

Bài 44. (1 – b); (2 – a); (3 – d).

Bài 45. a) Đ b) S c) S

d) Đ e) Đ f) S.

Bài 46. a) $(-2006; 2006)$ b) $\varnothing$

c) $(0; 10]$ d) $\mathbf{N}^*$.

Bài 47. Vì sai số tuyệt đối không vượt quá $\dfrac{1}{100}$ nên số quy tròn của β là 257,4.

Chương 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

Dạng 1. Hàm số – Đồ thị – Tính chẵn, lẻ

Bài 48.

a) $D = \mathbf{R}$ b) $D = \mathbf{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ c) $D = \left[\frac{3}{2}; 5\right]$ d) $D = \mathbf{R}$.

Bài 49.

a) Ta có : $|x + 1| + 1 > 0$ với $\forall x \in \mathbf{R}$.

Vậy TXĐ của hàm số $y = \dfrac{|x-1|}{|x+1|+1}$ là $D = \mathbf{R}$.

b) Điều kiện : $|x + 1| - 1 \neq 0$

Giải phương trình : $|x + 1| - 1 = 0 \Leftrightarrow |x + 1| = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 1 \\ x + 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Vậy TXĐ của hàm số $y = \dfrac{|x-1|}{|x+1|+1}$ là $D = \mathbf{R}\backslash\{0; -2\}$.

Bài 50.

a) $x^2 + 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 \geq 0;\ x + 4 \geq 0 \\ x - 1 \leq 0;\ x + 4 \leq 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1;\ x \geq -4 \\ x \leq 1;\ x \leq -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -4 \end{array}\right.$$

Vậy TXĐ của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ là :

$$D = (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$$

hoặc $D = \mathbf{R}\backslash(-4; 1)$.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x^2 + 3x - 4 \geq 0 & (1) \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 & (2) \end{array}\right.$

Giải (1) : $x^2 + 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -4 \end{array}\right.$ (theo a)

Giải (2) : $x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 \geq 0;\ x + 4 \geq 0 \\ x - 1 \leq 0;\ x + 4 \leq 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1;\ x \geq 4 \\ x \leq 1;\ x \leq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq 1 \end{array}\right.$$

Do đó hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{R} \setminus (-4; 1) \\ \mathbf{R} \setminus (1; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{R} \setminus (-4; 4).$

Vậy TXĐ của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ là :

$$D = \mathbf{R} \setminus (-4; 4).$$

c) * Ta có : $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1}$ luôn có nghĩa với $\forall x \in \mathbf{R}$.

* Xét hàm số $g(x) = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$

– Nếu $x \geq 0$, suy ra $g(x) > 0$ (1)

– Nếu $x < 0$, ta có :

$$g(x) = x + \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - x + 1}\right)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right)}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}$$

$$= \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}$$

Ta nhận thấy khi $x < 0$ thì $-x + 1 > 0$ và $\sqrt{x^2 - x + 1} - x > 0$

Do đó $g(x) > 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $g(x) = x + \sqrt{x^2 - x + 1} > 0$ với $\forall x \in \mathbf{R}$.

Vậy TXĐ của hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$ là $D = \mathbf{R}$.

Bài 51. Chỉ có quy tắc cho tương ứng ở hình c) và d) cho ta một hàm số.

Bài 52.

a) $y = -3x^2$ trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$

- Trên $(-\infty; 0)$: Lấy bất kì $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ sao cho $x_1 \neq x_2$.

Ta có : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-3x_2^2 + 3x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{-3(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$

$= -3(x_2 + x_1) > 0$ (vì $x_2 + x_1 < 0$)

Vậy hàm số $y = -3x^2$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

- Trên $(0; +\infty)$: Lấy bất kì $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ sao cho $x_1 \neq x_2$

Ta có :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-3x_2^2 + 3x_1^2}{x_2 - x_1} = -3(x_2 + x_1) < 0 \text{ (vì } x_2 + x > 0$$

Vậy hàm số $y = -3x^2$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

b) $y = \frac{x}{x - 5}$ trên $(-\infty; 5)$ và $(5; +\infty)$

- Trên $(-\infty; 5)$: Lấy bất kì $x_1, x_2 \in (-\infty; 5)$ sao cho $x_1 \neq x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{x_2 - 5} - \frac{x_1}{x_1 - 5} = \frac{x_2(x_1 - 5) - x_1(x_2 - 5)}{(x_2 - 5)(x_1 - 5)}$$

$$= \frac{-5x_2 + 5x_1}{(x_2 - 5)(x_1 - 5)} = \frac{-5(x_2 - x_1)}{(x_2 - 5)(x_1 - 5)}$$

Xét tỉ số $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-5}{(x_2 - 5)(x_1 - 5)} < 0$

(Vì $x_2 - 5 < 0$; $x_1 - 5 < 0 \Rightarrow (x_2 - 5)(x_1 - 5) > 0$)

Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 5)$.

- Trên $(5; +\infty)$: Lấy bất kì $x_1, x_2 \in (5; +\infty)$ mà $x_1 \neq x_2$.

Tương tự ở trên ta cũng có :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-5}{(x_2 - 5)(x_1 - 5)} < 0$$

(Vì $x_2 - 5 > 0$; $x_1 - 5 > 0 \Rightarrow (x_2 - 5)(x_1 - 5) > 0$)

Do đó hàm số $y = \frac{x}{x - 5}$ cũng nghịch biến trên $(5; +\infty)$.

Bài 53.

a) $y = x^2 + 2x + 1$ trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$; $x_1 \neq x_2$ ta có :

$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2^2 + 2x_2 + 1) - (x_1^2 + 2x_1 + 1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(x_2 + 1)^2 - (x_1 + 1)^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2)}{(x_2 - x_1)} = x_2 + x_1 + 2$$

- Trên $(-\infty; -1)$: Lấy x_1, x_2 bất kì $\in (-\infty; -1)$ sao cho $x_1 \neq x_2$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 + 2 < 0$$

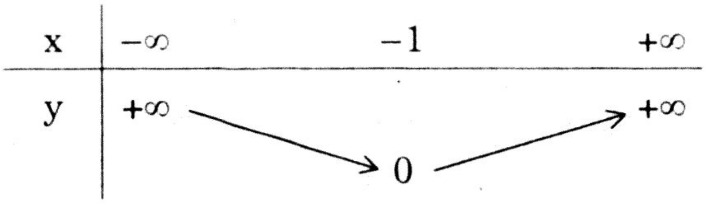
Nên hàm số $y = x^2 + 2x + 1$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

- Trên $(-1; +\infty)$: Lấy bất kì $x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$ sao cho $x_1 \neq x_2$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 + 2 > 0$$

Nên hàm số $y = x^2 + 2x + 1$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Bảng biến thiên :



b) $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

Với $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$; $x_1 \neq x_2$ ta có :

$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-2x_2^2 + 4x_2 + 1) - (-2x_1^2 + 4x_1 + 1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(-2x_2^2 + 2x_1^2) + 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = -2(x_2 + x_1) + 4$$

- Trên $(-\infty; 1)$: Lấy bất kì $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$ sao cho $x_1 \neq x_2$.

Ta có : $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -2(x_2 + x_1) + 4 > 0$

Nên $y = -2x^2 + 4x + 1$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$

- Trên $(1; +\infty)$: Lấy bất kì $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ sao cho $x_1 \neq x_2$.

Ta có : $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -2(x_2 + x_1) + 4 < 0$

Nên $y = -2x^2 + 4x + 1$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$

Bảng biến thiên :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & -1 & & +\infty \\
\hline
 & & & 3 & & \\
y & & \nearrow & & \searrow & \\
 & -\infty & & & & -\infty
\end{array}$$

Bài 54.

a) $y = |2x|$

Tập xác định của hàm số là **R**.

- Với mọi $x \in \mathbf{R}$ ta có $-x \in \mathbf{R}$.
- $\forall x \in \mathbf{R}$; $f(-x) = |2.(-x)| = |-2x| = |2x| = f(x)$

Vậy $y = f(x) = |2x|$ là hàm số chẵn.

b) $y = f(x) = (x^2 + 3)^2 = x^4 + 6x^2 + 9$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}$.

- $\forall x \in \mathbf{R}$, ta có $-x \in \mathbf{R}$.
- $\forall x \in \mathbf{R}$; $f(-x) = (-x)^4 + 6(-x)^2 + 9 = x^4 + 6x^2 + 9 = f(x)$

Vậy $y = (x^2 + 3)^2$ là hàm số chẵn.

Bài 55.

a) Tập xác định của hàm số $y = |x + 3| - |x - 3|$ là $D = \mathbf{R}$.

- Với mọi $x \in \mathbf{R}$ ta có $-x \in \mathbf{R}$.
- $\forall x \in \mathbf{R}$; $f(-x) = |-x + 3| - |-x - 3| = |x - 3| - |x + 3$

$$= -\left(|x + 3| - |x - 3|\right) = -f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ của hàm số $y = \sqrt{x + 1}$ là : $D = \mathbf{R}\backslash(-\infty; -1)$.

$\forall x \in D$ thì $-x \notin D$ nên hàm số đã cho không chẵn, không lẻ.

c) Ta có TXĐ của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

- Với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.
- $\forall x \in D$;

$$f(-x) = -x - \frac{(-x)^5 - (-x)}{\sqrt{(-x)^2 + |-x|}} = -x + \frac{x^5 - x}{\sqrt{x^2 + |x|}} = -\left(x - \frac{x^5 - x}{\sqrt{x^2 + |x|}}\right)$$

$$= -f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

d) $y = |x - 3| + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = |x - 3| + |x + 3|$

TXĐ của hàm số là $D = \mathbf{R}$.

- $\forall x \in \mathbf{R}$ thì $-x \in \mathbf{R}$.
- $\forall x \in \mathbf{R}$; $f(-x) = |-x - 3| + |-x + 3| = |x + 3| + |x - 3|$

  $= f(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Bài 56. Khoanh vào C.

Bài 57. Điền dấu × vào câu b).

Dạng 2. Hàm số $y = ax + b$

Bài 58.

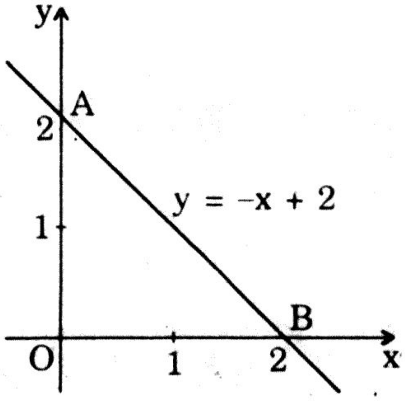
a) $y = -x + 2$

Đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm :

– Điểm cắt trục tung : A(0; 2)

– Điểm cắt trục hoành : B(2; 0)

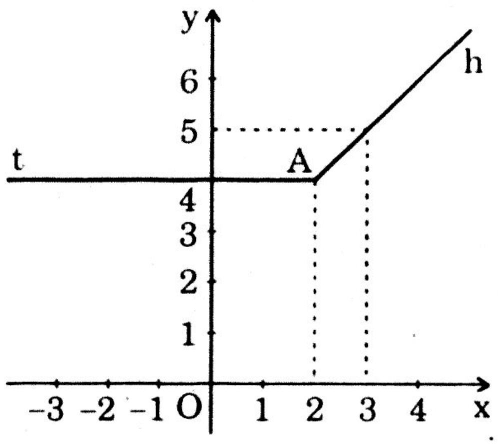
Đường thẳng AB là đồ thị của hàm số.



b) $y = \begin{cases} x + 2 & \text{với } x > 2 \\ 4 & \text{với } x \le 2 \end{cases}$

Đồ thị của hàm số gồm hai nửa đường thẳng :

- Trong nửa khoảng $(-\infty; 2]$ hàm số cho bởi $y = 4$ nên có đồ thị là nửa đường thẳng At.
- Trong khoảng $(2; +\infty)$ hàm số cho bởi $y = x + 2$ nên có đồ thị là nửa đường thẳng Ah (không kể điểm A(2; 4)).



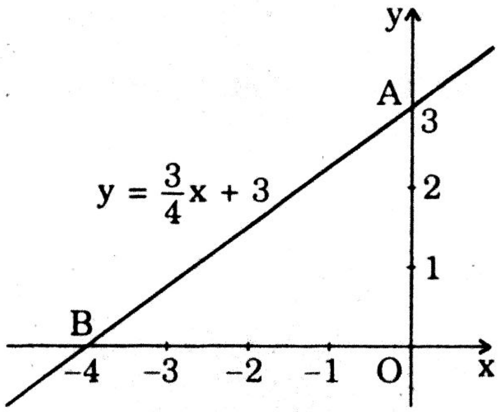
Bài 59.

a) $y = \frac{3}{4}x + 3$

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm :

- Điểm cắt trục tung A(0; 3)
- Điểm cắt trục hoành B(–4; 0)

Đồ thị của hàm số là đường thẳng AB.

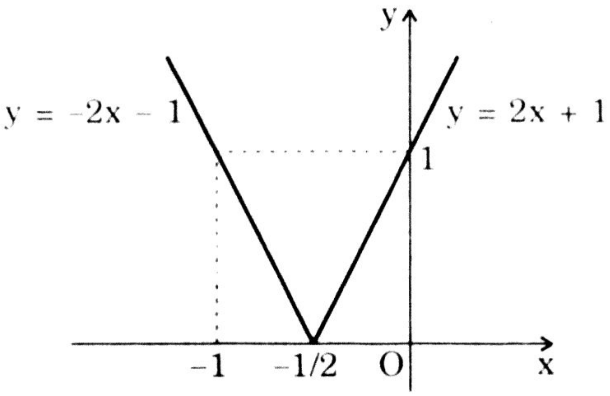


b) $$y = |2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{nếu } x \geq \frac{-1}{2} \\ -2x - 1 & \text{nếu } x \leq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị :



Bài 60. Gọi phương trình đường thẳng cần lập là $y = ax + b$

- Vì đường thẳng có hệ số góc là -3 nên $a = -3$.

  Do đó $y = -3x + b$.

- Vì đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2)$ nên

  $$2 = -3.1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 5$$

  Vậy đường thẳng cần tìm là : $y = -3x + 5$.

Bài 61. Gọi phương trình đường thẳng AB là : $y = ax + b$

Vì đường thẳng AB đi qua $A(-1; 1)$ nên : $1 = -a + b$ (1)

Vì đường thẳng AB đi qua $B(3; -2)$ nên : $-2 = 3a + b$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $a = \frac{-3}{4}$ và $b = \frac{1}{4}$

Suy ra phương trình đường thẳng AB : $y = \frac{-3}{4}x + \frac{1}{4}$.

Gọi $I(x_I; y_I)$ là trung điểm của AB.

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB có dạng :

$$y = a'x + b'.$$

Do đường thẳng AB và đường trung trực của nó vuông góc với nhau nên :

$$a.a' = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{4}.a' = -1 \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{4}{3}$$

Vì đường thẳng $y = \frac{4}{3}x + b'$ đi qua $I\left(1; \frac{-1}{2}\right)$

Nên : $-\frac{1}{2} = \frac{4}{3}.1 + b' \Rightarrow b' = -\frac{11}{6}$

Vậy phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB là :

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{6}.$$

Bài 62. Khoanh vào C.

Bài 63. Điền dấu × vào câu c).

Bài 64. Điền dấu × vào câu b).

Dạng 3. Hàm số bậc hai

Bài 65.

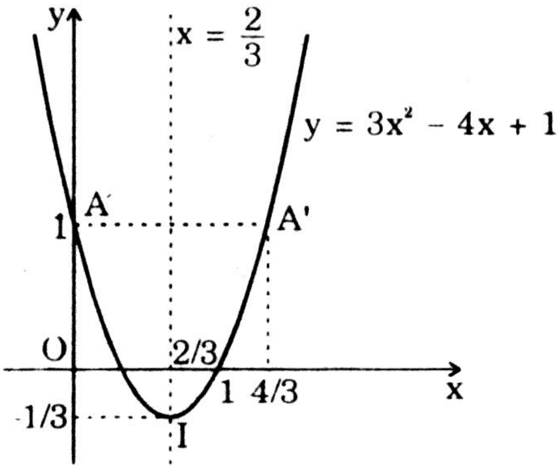
a) $y = 3x^2 - 4x + 1$

- Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.
- Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$
- Bảng biến thiên :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & \frac{2}{3} & & +\infty \\
\hline
y & +\infty & & & & +\infty \\
 & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & -\frac{1}{3} & &
\end{array}$$

- Giao điểm với trục Oy : A(0; 1)
- Giao điểm với trục Ox : B(1; 0) và $C\left(\frac{1}{3}; 0\right)$
- Trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{2}{3}$.
- Điểm đối xứng với điểm A(0; 1) qua đường thẳng $x = \frac{2}{3}$ là điểm $A'\left(\frac{4}{3}; 1\right)$.

- Đồ thị :

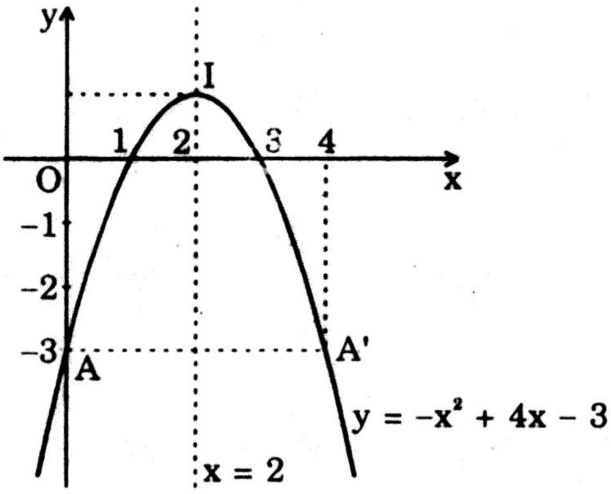


b) $y = -x^2 + 4x - 3$

- Tập xác định của hàm số D = **R**.
- Tọa độ đỉnh I(2; 1).
- Bảng biến thiên :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & 2 & & +\infty \\
\hline
y & & \nearrow & 1 & \searrow & \\
 & -\infty & & & & -\infty
\end{array}$$

- Giao điểm với trục Oy : A(0; –3)
- Giao điểm với trục Ox : B(1; 0) và C(3; 0)
- Trục đối xứng là đường thẳng x = 2.
- Điểm đối xứng với điểm A(0; –3) qua đường thẳng x = 2 là điểm A'(4; –3).
- Đồ thị :



Bài 66.

a) Vì đồ thị hàm số đi qua điểm P(2; 7) nên ta có :

$$7 = 4a + 2b - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 2b = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + b = 4 \qquad (1)$$

Vì đồ thị của hàm số đi qua điểm Q(–1; 4) nên ta có :

$$4 = a - b - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a - b = 5 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) nên ta được hệ : $\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a - b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là $y = 3x^2 - 2x - 1$.

b) Vì đồ thị của hàm số đi qua điểm M(1; 6) nên :

$$6 = a + b - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 7$$

Vì đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{-3}{4}$ nên

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 3a - 2b = 0$$

Ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 14 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{14}{5} \\ b = \dfrac{21}{5} \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là : $y = \frac{14}{5}x^2 + \frac{21}{5}x - 1$.

Bài 67.

a) Vì đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + 3$ có tọa độ đỉnh I(1; 5) nên ta có : $5 = a + b + 3$ (do $I \in (P)$)

$$\Leftrightarrow \quad a + b = 2$$

Mặt khác, hoành độ của tọa độ đỉnh bằng 1 nên :

$$-\frac{b}{2a} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + b = 0$$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -2x^2 + 4x + 3$.

b) Vì điểm H(-1; 9) thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + 3$ nên

$$9 = a - b + 3 \quad \Leftrightarrow \quad a - b = 6$$

Vì tung độ đỉnh của parabol bằng 1 nên :

$$\frac{-\Delta}{4a} = 1 \Leftrightarrow \frac{(-b^2 - 4ac)}{4a} = 1 \Leftrightarrow -b^2 + 4ac = 4a$$

$$\Leftrightarrow -b^2 + 12a = 4a \text{ (do } c = 3)$$

$$\Leftrightarrow 8a - b^2 = 0$$

Ta được hệ : $\begin{cases} a - b = 6 \\ 8a - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 6 & (1) \\ 8(b + 6) - b^2 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (2) : $8b + 48 - b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 - 8b - 48 = 0$

$$\Delta' = 16 + 48 = 64 > 0$$

$$b_1 = \frac{4 + 8}{1} = 12; \quad b_2 = 4 - 8 = -4$$

- Khi $b = 12$ thì $a = 12 + 6 = 18$
- Khi $b = -4$ thì $a = -4 + 6 = 2$

Vậy ta có hai hàm số cần tìm là :

$$y = 18x^2 + 12x + 3 \text{ hoặc } y = 2x^2 - 4x + 3.$$

Bài 68. Gọi parabol cần tìm là $y = ax^2 + bx + c$

- Vì (P) đi qua $I\left(\frac{1}{2}; \frac{-25}{4}\right)$ nên : $\frac{-25}{4} = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$

$$\Leftrightarrow -25 = a + 2b + 4c$$

- Vì (P) đi qua điểm $M(2; -4)$ nên : $-4 = 4a + 2b + c$
- Vì (P) có tọa độ đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; \frac{-25}{4}\right)$ nên : $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -b$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} a = -b & (1) \\ a + 2b + 4c = -25 & (2) \\ 4a + 2b + c = -4 & (3) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) và (3) ta được :

$$\begin{cases} b + 4c = -25 \\ -2b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 8c = -50 \\ -2b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -6 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vì $b = -1$ nên $a = 1$ (theo (1))

Vậy hàm số cần tìm là $y = x^2 - x - 6$.

Bài 69.

- Vì parabol đi qua điểm A(0; 4) nên :

$$4 = a.0^2 + b.0 + c \quad \text{hay} \quad c = 4$$

- Vì parabol đi qu [illegible] B(1; 9) nên : $9 = a + b + c$
- Vì parabol đi [illegible] C(−2; 6) nên : $6 = 4a - 2b + c$

Ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} c = 4 \\ a + b + c = 9 \\ 4a - 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a + b = 5 \\ 4a - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 2a + 2b = 10 \\ 4a - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Vậy parabol cần tìm là $y = 2x^2 + 3x + 4$.

Bài 70. Đánh dấu × vào câu b).

Bài 71. Đánh dấu × vào câu d).

Bài 72. Khoanh vào C.

Bài 73. Khoanh vào D.

Bài 74. a) Đ b) S c) S d) S.

Bài 75. Đánh dấu × vào câu b).

Dạng 4. Tổng hợp

Bài 76.

a) $y = |x|$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- Với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.
- $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

Vậy $y = f(x) = |x|$ là hàm số chẵn.

b) $y = x^3 - 2x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- Với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.
- $f(-x) = (-x)^3 - 2.(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x)$

Vậy $y = f(x) = x^3 - 2x$ là hàm số lẻ.

c) $y = \dfrac{1}{x^2}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- Với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

- $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2} = f(x)$

Vậy $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ là hàm số chẵn.

d) $y = \sqrt{1 - x^2}$ có tập xác định $D = [-1; 1]$

- Với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.
- $f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x)$

Vậy $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ là hàm số chẵn.

Bài 77. Ta có : $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1 > 0 \quad (\forall x \in \mathbf{R})$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 4x + 5}$ là $D = \mathbf{R}$.

Bài 78.

a) Vì (P) đi qua $A(1; -8)$ nên : $-8 = a + b + c$

Vì (P) đi qua $I(-1; 4)$ nên : $4 = a - b + c$

Vì (P) có tọa độ đỉnh $I(-1; 4)$ nên : $\dfrac{-b}{2a} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a = b$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 2a = b & (1) \\ a + b + c = -8 & (2) \\ a - b + c = 4 & (3) \end{cases}$

Thay $b = 2a$ vào (2) và (3) ta được :

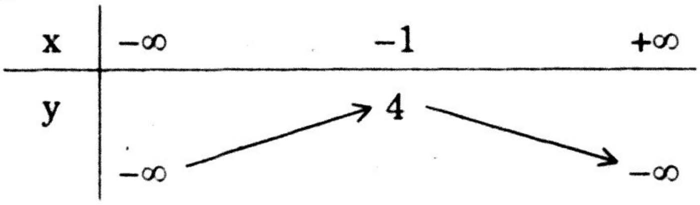
$$\begin{cases} a + 2a + c = -8 \\ a - 2a + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + c = -8 \\ -a + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

Khi $a = -3$ thì $b = -6$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -3x^2 - 6x + 1$.

b) Tập xác định của hàm số $y = -3x^2 - 6x + 1$ là $\mathbf{R}$.

- Tọa độ đỉnh $I(-1; 4)$
- Bảng biến thiên :



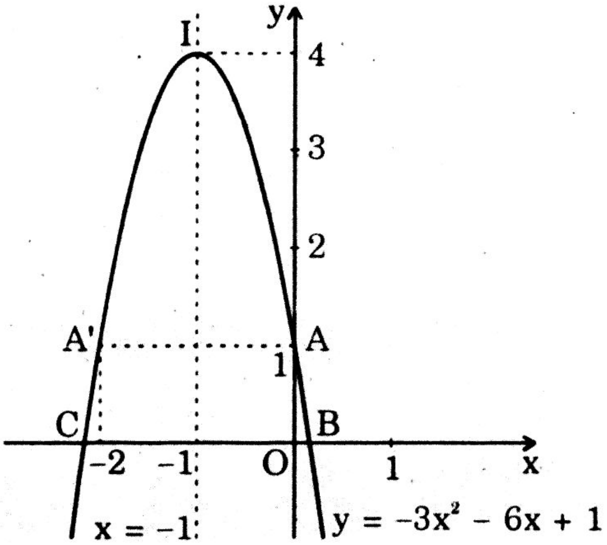
- Giao điểm với trục Oy : A(0; 1)
- Giao điểm với trục Ox : $-3x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\Delta' = 9 + 3 = 12$$

$$x_1 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{-3} = \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3};\quad x_2 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{-3} = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}; 0\right) \text{ và } C\left(\frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$$

- Trục đối xứng là đường thẳng x = −1.
- Điểm đối xứng với điểm A(0; 1) qua trục đối xứng là A'(−2; 1).
- Đồ thị :



Bài 79.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$$x^2 + 2x + 4 = kx + 2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 + (2 - k)x + 2 = 0$$

$$\Delta = (2 - k)^2 - 8 = k^2 - 4k + 4 - 8 = k^2 - 4k - 4$$

Để đồ thị hai hàm số tiếp xúc nhau

$\Leftrightarrow \quad \Delta = 0$

$\Leftrightarrow \quad k^2 - 4k - 4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad k_1 = 2 + 2\sqrt{2};\quad k_2 = 2 - 2\sqrt{2}$

Vậy với $k = 2 + 2\sqrt{2}$ hoặc $k = 2 - 2\sqrt{2}$ thì đồ thị hai hàm số đã cho tiếp xúc nhau.

b) Để đồ thị hai hàm số đã cho có hai điểm chung

$\Leftrightarrow \quad \Delta > 0 \quad\Leftrightarrow\quad k^2 - 4k - 4 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad k^2 - 4k + 4 - 8 > 0$

$\Leftrightarrow \quad (k - 2)^2 - (2\sqrt{2})^2 > 0$

$$\Leftrightarrow \quad (k-2+2\sqrt{2})(k-2-2\sqrt{2})>0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k-2+2\sqrt{2}>0;\ k-2-2\sqrt{2}>0 \\ k-2+2\sqrt{2}<0;\ k-2-2\sqrt{2}<0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k>2-2\sqrt{2};\ k>2+2\sqrt{2} \\ k<2-2\sqrt{2};\ k<2+2\sqrt{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k>2+2\sqrt{2} \\ k<2-2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy để (P) và (d) có hai điểm chung khi

$k > 2+2\sqrt{2}$ hoặc $k < 2-2\sqrt{2}$.

Bài 80. Gọi phương trình đường thẳng (d) cần lập là $y = ax + b$.

Vì (d) đi qua điểm $M(0;\ 6)$ nên $b = 6$ lúc đó $(d) : y = ax + 6$ (*)

Do đường thẳng (d) cắt $(P) : y = x^2 + 2x - 3$ theo một dây cung nhận điểm M là trung điểm nên gọi $A(x_A;\ y_A)$ và $B(x_B;\ y_B)$ là giao điểm của (d) với (P). Ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = x_M = 0 \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = y_M = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B & (1) \\ y_A + y_B = 12 & (2) \end{cases}$$

Vì A và B thuộc (P) nên từ (1) và (2) ta có :

$$x_A^2 + 2x_A - 3 + x_B^2 + 2x_B - 3 = 12$$

$$\Rightarrow \quad 2x_A^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad x_A^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x_A = \pm 3$$

Khi $x_A = -3$ thì $x_B = 3$; khi $x_A = 3$ thì $x_B = -3$.

Thay $x_A = -3$ vào (P) ta được $y_A = 0$

Mặt khác $A \in (d)$ nên thay tọa độ $A(-3;\ 0)$ vào (*) :

$$0 = a.(-3) + 6 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

Vậy $(d) : y = 2x + 6$ là đường thẳng cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 81. Chọn B.

Bài 82. (1 – b); (2 – c).

Bài 83. Khoanh vào C.

Chương 3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dạng 1. Một số phương pháp giải phương trình

Bài 84. $5x - 3 = 5(x - 1) \Leftrightarrow 5x - 3 = 5x - 5$

$\Leftrightarrow 5x - 5x = -5 + 3 \Leftrightarrow 0x = -2$

Phương trình đã cho vô nghiệm; $S = \varnothing$.

Bài 85. $x + m^2 = 1 + mx \Leftrightarrow (m - 1)x = m^2 - 1$ (*)

Biện luận :

- Nếu $m = 1$: (*) $\Leftrightarrow 0x = 0$.

  Phương trình đã cho có vô số nghiệm.
- Nếu $m \neq 1$: (*) $\Leftrightarrow x = \dfrac{m^2 - 1}{m - 1} = \dfrac{(m + 1)(m - 1)}{(m - 1)} = m + 1$

Kết luận :

- Nếu $m = 1$: Phương trình có vô số nghiệm.
- Nếu $m \neq 1$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = m + 1$.

Bài 86. $mx - 2m^2 = -3x + 6m \Leftrightarrow (m + 3)x = 2m^2 + 6m$

$\Leftrightarrow (m + 3)x = 2m(m + 3)$ (1)

Biện luận :

- Nếu $m = -3$: (1) $\Leftrightarrow 0x = 0$: Phương trình có vô số nghiệm.
- Nếu $m \neq -3$: (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{2m(m + 3)}{(m + 3)} = 2m$

Vậy :Nếu $m = -3$: Phương trình có vô số nghiệm.

Nếu $m \neq -3$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2m$.

Bài 87. Có hai khả năng :

- Khi $m = 1$, phương trình : $(m - 1)x^2 + x - m = 0$

  $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Khi $m \neq 1$, phương trình bậc hai : $(m - 1)x^2 + x - m = 0$ có dạng : $a + b + c = m - 1 + 1 - m = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{-m}{m - 1}$.

  Vậy : Khi $m = 1$; $S = \{1\}$

  Khi $m \neq 1$; $S = \left\{1; \dfrac{-m}{m - 1}\right\}$.

Bài 88. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 63$

$\Leftrightarrow \quad (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) = 63$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 63 \quad (*)$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$

$(*) \Leftrightarrow t(t + 2) - 63 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 63 = 0$

$\Delta' = 1 + 63 = 64 > 0$

$t_1 = -1 + 8 = 7; \quad t_2 = -1 - 8 = -9$

- Khi $t = 7$: $x^2 + 5x + 4 = 7 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 3 = 0$

  $\Delta = 25 + 12 = 37$

  $x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{37}}{2}; \quad x_2 = \dfrac{-5 - \sqrt{37}}{2}$

- Khi $t = -9$: $x^2 + 5x + 4 = -9 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 13 = 0$

  $\Delta = 25 - 52 = -37 < 0$. Phương trình vô nghiệm.

Vậy $S = \left\{\dfrac{-5 + \sqrt{37}}{2}; \dfrac{-5 - \sqrt{37}}{2}\right\}$.

Bài 89. $x^2 + 2mx + 1 + 2m + m^2 = 0$

$\Delta' = m^2 - (1 + 2m + m^2) = -2m - 1$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \quad \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m - 1 > 0 \Leftrightarrow 2m < -1 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$

Vậy với $m < -\dfrac{1}{2}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Bài 90. $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$

$\Delta' = (m - 1)^2 - (m - 3) = m^2 - 2m + 1 - m + 3$

$= m^2 - 3m + 4 = m^2 - 2m.\dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{7}{4} = \left(m - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0$

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Bài 91.

a) $2x^2 + 5x + 1 - m = 0$

Để phương trình có hai nghiệm cùng âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \geq 0\\ S < 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}25 - 8(1 - m) \geq 0 & (1)\\ S = \dfrac{-5}{4} < 0 & (2)\\ P = \dfrac{1 - m}{2} > 0 & (3)\end{cases}$$

Từ (1) : $25 - 8 + 8m \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \geq \dfrac{-17}{8}$ (*)

Từ (3) : $1 - m > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < 1$ (**)

Kết hợp (*) và (**) suy ra : $\dfrac{-17}{8} < m < 1$

Vậy với $\dfrac{-17}{8} \leq m < 1$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm cùng âm.

b) $3x^2 + 4x + 2(m - 1) = 0$

Để phương trình có hai nghiệm cùng âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' \geq 0\\ S < 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 - 6(m - 1) \geq 0 & (1)\\ S = \dfrac{-4}{3} < 0 & (2)\\ P = \dfrac{2(m - 1)}{3} > 0 & (3)\end{cases}$$

Từ (1) : $-6m + 10 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \leq \dfrac{5}{3}$ (*)

Từ (3) : $m - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > 1$ (**)

Kết hợp (*) và (**) suy ra : $1 < m \leq \dfrac{5}{3}$

Vậy với $1 < m \leq \dfrac{5}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm cùng âm.

Bài 92. $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x + 1)(x - 1)(x + 2) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 + x)(x^2 + x - 2) - 24 = 0$ (*)

Đặt ẩn phụ : $x^2 + x = t$

$(*) \Leftrightarrow t(t-2) - 24 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 24 = 0$

$\Leftrightarrow t = 6; \quad t = -4$

a) Khi $t = 6$: $x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -3; \quad x_2 = 2$

b) Khi $t = -4$: $x^2 + x = -4$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 4 = 0$. Phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{2; -3\}$.

Bài 93 $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$

Để phương trình có hai nghiệm cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m^2 + m - 6) \geq 0 \\ 2m + 1 > 0 \\ m^2 + m - 6 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m + 24 = 25 > 0 \\ m > -\dfrac{1}{2} \\ (m+3)(m-2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25 > 0 \\ m > -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m > -3;\ m > 2 \\ m < -3;\ m < 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 > 0 \\ m > -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Vậy với $m > 2$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm cùng dương.

Bài 94 Vì x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 7x - 11 = 0$ nên : $x_1 + x_2 = 7$ và $x_1x_2 = -11$.

Do đó 7 và -11 là hai nghiệm của phương trình cần lập.

Phương trình bậc hai cần lập có dạng $x^2 - Sx + P = 0$

Trong đó $S = 7 + (-11) = -4$

$P = 7.(-11) = -77$

Vậy phương trình cần lập là : $x^2 + 4x - 77 = 0$.

Bài 95. Ta có : $\Delta = (2m - 3)^2 - 4(m^2 - 3m)$

$$= 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 12m = 9 > 0$$

a) Để phương trình đã cho có hai nghiệm khác dấu

$$\Leftrightarrow \quad P < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 3m < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m - 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0;\ m - 3 < 0 \\ m < 0;\ m - 3 > 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0;\ m < 3 \\ m < 0;\ m > 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < m < 3$$

b) Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu

$$\Leftrightarrow \quad P > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 3m > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m - 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0;\ m - 3 > 0 \\ m < 0;\ m - 3 < 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 0 \end{array}\right.$$

Vậy với $m > 3$ hoặc $m < 0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu.

Dạng 2. Một số phương pháp giải phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài 96.

a) $0x + 3y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{2}{3}$

Nghiệm tổng quát của phương trình $\left(x \in \mathbf{R};\ y = \dfrac{2}{3}\right)$.

b) $-3x + 0y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

Nghiệm tổng quát của phương trình $(x = -1;\ y \in \mathbf{R})$.

c) $2x - 3y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3y = 2x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{3}$

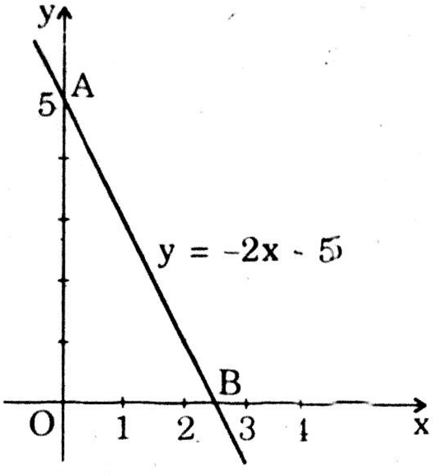
Nghiệm tổng quát của phương trình $\left(x \in \mathbf{R};\ y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{3}\right)$.

Bài 97. $2x + y = 5$

$\Leftrightarrow \quad y = -2x + 5$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $(x \in \mathbf{R};\ y = -2x + 5)$.

Biểu diễn tập nghiệm lên mặt phẳng tọa độ Oxy là đường thẳng $y = -2x + 5$ (1).



Đường thẳng (1) đi qua hai điểm A(0; 5) và điểm $B\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

Bài 98. $3x + 2y = 17$

Ta có 17 là một số lẻ mà 2y là một số chẵn nên 3x phải là một số lẻ. Vì 3 là một số lẻ nên x lẻ.

Do đó : $x = 2t + 1$ $(t \in \mathbf{Z})$

$$\Rightarrow \quad 3(2t + 1) + 2y = 17 \quad \Rightarrow \quad 6t + 3 + 2y = 17$$

$$\Rightarrow \quad 2y = -6t + 14 \quad \Rightarrow \quad y = -3t + 7$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là :

$$x = 2t + 1; \quad y = -3t + 7 \quad \text{với } t \in \mathbf{Z}.$$

Bài 99. $3x + 17y = 123$ (1)

Ta có 3x và 123 đều chia hết cho 3 nên : $17y \vdots 3$ suy ra $y \vdots 3$ (vì 17 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau)

Đặt $y = 3t$ $(t \in \mathbf{Z})$

Thay vào phương trình (1) ta được : $3x + 17.3t = 123$

$$\Rightarrow \quad x + 17t = 41 \quad \Rightarrow \quad x = 41 - 17t$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là :

$$x = 41 - 17t; \quad y = 3t \quad \text{với } t \in \mathbf{Z}.$$

Bài 100. $3x + 4y = 43 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 43 - 4y$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{43 - 4y}{3} = 14 - y - \frac{y - 1}{3} \qquad (*)$$

Vì $x, y \in \mathbf{Z}$ nên $\frac{y - 1}{3} = t \in \mathbf{Z}$

Suy ra : $y - 1 = 3t \quad \Rightarrow \quad y = 3t + 1$

Thay vào (*) ta có : $x = 14 - 3t - 1 - \dfrac{3t + 1 - 1}{3}$

$$x = 14 - 3t - t - 1 = 13 - 4t$$

Để tìm nghiệm nguyên dương ta cần có :

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 - 4t > 0 \\ 3t + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t < \dfrac{13}{4} \\ t > -\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z})$$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{3} < t < \frac{13}{4}$ và $t \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad t = 0; 1; 2; 3$

- Khi t = 0 thì (x; y) = (13; 1)
- Khi t = 1 thì (x; y) = (9; 4)
- Khi t = 2 thì (x; y) = (5; 7)
- Khi t = 3 thì (x; y) = (1; 10)

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là

(x; y) = (13; 1), (9; 4), (5; 7), (1; 10).

Bài 101. Với $x, y \in \mathbb{Z}$, ta có $3x \vdots 3$ và $6y \vdots 3$ nên $(3x + 6y) \vdots 3$

Mà $23 \not\vdots\ 3$

Vậy phương trình đã cho không thể có nghiệm nguyên.

Dạng 3. Hệ phương trình

Bài 102.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 12 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ -2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là : (x = 3; y = –2).

b) $\begin{cases} 5x - 4y = 13 \\ 4x + 5y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x - 20y = 65 \\ 16x + 20y = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 41x = 41 \\ 4x + 5y = -6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4 + 5y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là : (x = 1; y = –2).

Bài 103. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 3y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ -4x + 3(2x - 3) = -8 \end{cases}$

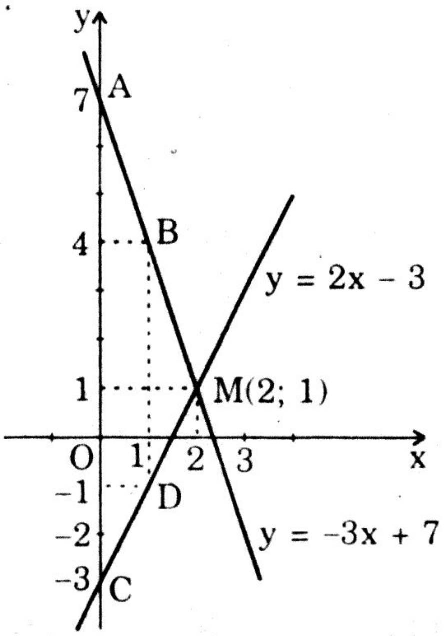
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2.\frac{1}{2} - 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là : $\left(x = \frac{1}{2}; y = -2 \right)$.

Bài 104. $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 7 & (d) \\ y = 2x - 3 & (d') \end{cases}$

Trên mặt phẳng Oxy :

- Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(0; 7) và B(1; 4).
- Đường thẳng (d') đi qua hai điểm C(0; –3) và D(1; –1).



Hai đường thẳng (d) và (d') cắt nhau tại M(2; 1).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là : (x = 2; y = 1).

Bài 105. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{13 - 2x}{3} & (1) \\ y = 3x - 3 & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\frac{13 - 2x}{3} = 3x - 3 \Leftrightarrow 13 - 2x = 9x - 9$$

$$\Leftrightarrow 11x = 22 \Leftrightarrow x = 2$$

Thay x = 2 vào (2) : $y = 3.2 - 3 = 3$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là : (x = 2; y = 3).

Bài 106. $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$

Ta có : $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$

$$D_x = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-6}{3} = -2; \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{3}{3} = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là : $(x = -2;\ y = 1)$.

Bài 107. $\begin{cases} mx - y = n \\ kx - y = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - n \\ y = kx - n \end{cases}$

- Nếu $m = k$ thì hệ đã cho có vô số nghiệm.
- Nếu $m \neq k$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Vậy hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m, n, k bất kì.

Bài 108. $\begin{cases} 2x - ay = -3 \\ ax + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3ay = -9 \\ a^2x + 3ay = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + 6)x = 4a - 9 \\ ax + 3y = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4a - 9}{a^2 + 6} \\ a.\dfrac{(4a - 9)}{a^2 + 6} + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4a - 9}{a^2 + 6} \\ y = \dfrac{3a + 8}{a^2 + 6} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất là :

$$\left(x = \frac{4a - 9}{a^2 + 6};\ y = \frac{3a + 8}{a^2 + 6}\right).$$

Ta có : $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 9 < 0 \\ 3a + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{9}{4} \\ a > -\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-8}{3} < a < \dfrac{9}{4}$

Vì a nguyên nên $a = -2; -1; 0; 1; 2$.

Bài 109. $\begin{cases} x + my = 1 & (1) \\ mx - 3my = 2m + 3 & (2) \end{cases}$

Từ (1) : $x = 1 - my$

Thay $x = 1 - my$ vào phương trình (2) :

$$m(1 - my) - 3my = 2m + 3 \Leftrightarrow m - m^2y - 3my = 2m + 3$$
$$\Leftrightarrow m(m + 3)y = -(m + 3)$$

- Nếu $m = 0$, ta có : $0y = -3$, phương trình vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = -3$ ta có : $0y = 0$, phương trình có vô số nghiệm nên hệ có vô số nghiệm.
- Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -3$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Vậy hệ vô nghiệm khi $m = 0$.

Bài 110. $\begin{cases} 3x + ny = 5 \\ nx - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + ny = 5 \\ n^2x - ny = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n^2 + 3)x = 2n + 5 \\ nx - y = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2n + 5}{n^2 + 3} \ (\text{do } n^2 + 3 > 0) \\ y = n.\dfrac{2n + 5}{n^2 + 3} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2n + 5}{n^2 + 3} \\ y = \dfrac{5n - 6}{n^2 + 3} \end{cases}$$

Thay vào đẳng thức ta có :

$$\frac{2n + 5}{n^2 + 3} + \frac{5n - 6}{n^2 + 3} = 1 + \frac{-n^2}{n^2 + 3} = \frac{3}{n^2 + 3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7n - 1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{4}{7}$$

Vậy với $n = \dfrac{4}{7}$ thì hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn :

$$x + y = 1 + \frac{-n^2}{n^2 + 3}.$$

Bài 111. $\begin{cases} x + y + z = 2 & (1) \\ 2x + 3y - z = 9 & (2) \\ 3x - y + 4z = -3 & (3) \end{cases}$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có : $3x + 4y = 11$ (4)

Nhân hai vế (1) với 4 ta được : $4x + 4y + 4z = 8$ (5)

Trừ (5) và (3) vế theo vế ta có : $x + 5y = 11$ (6)

Từ (4) và (6) ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ x + 5y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 3x + 15y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = 22 \\ x + 5y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Thay x = 1 và y = 2 vào phương trình (1) :

$$1 + 2 + z = 2 \quad \Rightarrow \quad z = -1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là : (x; y; z) = (1; 2; -1).

Bài 112. $\begin{cases} x - z = 2 \\ y - 3z = 2 \\ -3x - 2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + z \\ y = 2 + 3z \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + z \\ y = 2 + 3z \\ 3(2 + z) + 2(2 + 3z) - z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + z \\ y = 2 + 3z \\ 8z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là (x; y; z) = (1; –1; –1).

Bài 113. (x; y; z) = (0; 0; 0) là một nghiệm của hệ phương trình.

Khi x; y; z ≠ 0, ta có :

$$\begin{cases} 2(x + y) = 3xy \\ 6(y + z) = 5yz \\ 3(z + x) = 4zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{y + z}{yz} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{z + x}{zx} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} & (1) \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{6} & (2) \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3} & (3) \end{cases}$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được :

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{11}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \qquad (4)$$

Kết hợp (1) với (4) ta được $z = \frac{1}{3}$.

Kết hợp (2) với (4) ta được x = 1.

Kết hợp (3) với (4) ta được $y = \frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là :

$$(x; y; z) = (0; 0; 0) \text{ và } (x; y; z) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right).$$

Bài 114. $\begin{cases} x + y + z = 9 & (1) \\ y + z + t = 12 & (2) \\ z + t + x = 11 & (3) \\ t + x + y = 10 & (4) \end{cases}$

Cộng vế theo vế các phương trình của hệ ta có :

$$3(x + y + z + t) = 42 \quad \Leftrightarrow \quad x + y + z + t = 14 \qquad (5)$$

Kết hợp (5) và (1) ta được $t = 5$.

Kết hợp (5) và (3) ta được $y = 3$.

Kết hợp (5) và (2) ta được $x = 2$.

Kết hợp (5) và (4) ta được $z = 4$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm là :

$$(x; y; z; t) = (2; 3; 4; 5).$$

Bài 115. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{5} & (1) \\ 4x - 3y + 2z = 12 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có : $x = \dfrac{2z}{5}$; $\quad y = \dfrac{4z}{5}$

Thay vào (2) : $4.\dfrac{2z}{5} - 3.\dfrac{4z}{5} + 2z = 12$

$$\Leftrightarrow \quad 8z - 12z + 10z = 60$$

$$\Leftrightarrow \quad 6z = 60 \quad \Leftrightarrow \quad z = 10$$

Suy ra $x = \dfrac{2.10}{5} = 4$; $\quad y = \dfrac{4.10}{5} = 8$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là : $(x; y; z) = (4; 8; 10)$.

Chương 4. BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. Bất đẳng thức

Bài 116. Xét hiệu : $(ac + bd)^2 - (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$$= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 - b^2d^2$$

$$= -(a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2)$$

$$= -(ac - bc)^2 \leq 0 \quad \text{với } \forall a, b, c, d$$

Vậy : $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Bài 117. Giả sử tồn tại một tam giác có độ dài các đường cao là $h_1 = 1$; $h_2 = \sqrt{3}$ và $h_3 = \sqrt{3} + 1$ (cùng đơn vị đo).

Gọi a_1, a_2, a_3 lần lượt là độ dài ba cạnh tương ứng với các đường cao h_1, h_2, h_3.

Ta có : $a_1 = \dfrac{2S}{h_1}$; $a_2 = \dfrac{2S}{h_2}$; $a_3 = \dfrac{2S}{h_3}$ (với S là diện tích của tam giác)

Suy ra : $\dfrac{2S}{h_1} = a_1 < a_2 + a_3 = \dfrac{2S}{h_2} + \dfrac{2S}{h_3}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h_1} < \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1} < \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 9 < 5\sqrt{3} \text{ (mâu thuẫn)}$$

Vậy không tồn tại một tam giác có độ dài ba đường cao là 1; $\sqrt{3}$ và $\sqrt{3} + 1$ (cùng đơn vị đo).

Bài 118. Ta có : $(a - b)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a^2 + b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \quad (*)$$

Vì $a + b = 2$ nên thay vào (*) ta có :

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2.$$

Bài 119. Ta có : $0 \leq \sqrt{a} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) \leq 0$

$$0 \le \sqrt{b} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{b}(\sqrt{b} - 1) \le 0$$

$$0 \le \sqrt{c} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{c}(\sqrt{c} - 1) \le 0$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được :

$$\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) + \sqrt{b}(\sqrt{b} - 1) + \sqrt{c}(\sqrt{c} - 1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a - \sqrt{a} + b - \sqrt{b} + c - \sqrt{c} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a + b + c \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

$\Leftrightarrow \quad a + b + c \le \sqrt{2}$ (vì $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$).

Bài 120. Với a và b là hai số dương.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có : $a + b \ge 2\sqrt{ab}$

$$1 + ab \ge 2\sqrt{ab}$$

Suy ra : $(a + b)(1 + ab) \ge 4ab$

$\Rightarrow \quad a + b \ge \dfrac{4ab}{1 + ab}$ (do $1 + ab > 0$).

Bài 121. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có : $3a + 2b = 5$

$$\Rightarrow \quad 25 = (3a + 2b)^2 = (\sqrt{3}.\sqrt{3}a + \sqrt{2}.\sqrt{2}b)^2 \le (3 + 2)(3a^2 + 2b^2)$$

$$\Rightarrow \quad 25 \le 5(3a^2 + 2b^2) \quad \Rightarrow \quad 3a^2 + 2b^2 \ge 5$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{3}.\sqrt{2}b = \sqrt{2}.\sqrt{3}a \Leftrightarrow a = b = 1$.

Bài 122. Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (giả thiết)

Suy ra : $|a| \le 1; |b| \le 1; |c| \le 1$

$$\Rightarrow \quad (1 + a)(1 + b)(1 + c) \ge 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \ge 0 \quad (1)$$

Mặt khác : $\dfrac{1}{2}(a + b + c + 1)^2 =$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2ab + 2ac + 2bc + 2a + 2b + 2c) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a + b + c + 1)^2 = \frac{1}{2}(2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2a + 2b + 2c) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + ab + ac + bc + a + b + c \ge 0 \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có :

$$2(1 + ab + ac + bc + a + b + c) + abc \ge 0.$$

Bài 123. Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có :

$$0 < a < b + c \quad \Rightarrow \quad a^2 < a(b + c) \quad (1)$$

$$0 < b < a + c \quad \Rightarrow \quad b^2 < b(a + c) \quad (2)$$

$$0 < c < a + b \quad \Rightarrow \quad c^2 < c(a + b) \quad (3)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + ab + bc + ac + bc$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

II. Bất phương trình và hệ bất phương trình một ẩn

Bài 124.

a) Điều kiện $x \neq 1$ và $x \neq -2$.

b) $\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-1) \neq 0 \\ (x-1)(x+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1;\ x \neq 1 \\ x \neq 1;\ x \neq -3 \end{cases}$

Vậy điều kiện : $x \neq 1$; $x \neq -1$ và $x \neq -3$.

c) $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Điều kiện : $x \geq 1$.

d) $\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \neq -5 \end{cases}$

Điều kiện : $x \leq 2$ và $x \neq -5$.

Bài 125. Ta có : $4x^2 - 4x + 3 = (4x^2 - 4x + 1) + 2 = (2x - 1)^2 + 2 > 0$ với mọi x.

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 126.

a) $|x - 4| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 < 3 \\ x - 4 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 7.$

b) $2|x| + |x - 1| < 5$ (1)

- Nếu $x < 0$:

(1) $\Leftrightarrow -2x + 1 - x < 5 \Leftrightarrow -3x < 4 \Leftrightarrow x > \dfrac{-4}{3}$

Vậy nghiệm là : $\dfrac{-4}{3} < x < 0$.

- Nếu $0 \leq x < 1$:

(1) $\Leftrightarrow 2x + 1 - x < 5 \Leftrightarrow x < 4$

Vậy nghiệm là : $0 \leq x < 1$.

- Nếu $x \geq 1$:

$(1) \Leftrightarrow \quad 2x + x - 1 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3x < 6 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$

Vậy nghiệm là : $1 \leq x < 2$.

Kết luận : Nghiệm của bất phương trình là : $\frac{-4}{3} < x < 2$.

Bài 127.

a) $\frac{2x+1}{3} + \frac{x-2}{4} < \frac{1-3x}{5}$

$\Leftrightarrow \quad 20(2x+1) + 15(x-2) < 12(1-3x)$

$\Leftrightarrow \quad 40x + 20 + 15x - 30 < 12 - 36x$

$\Leftrightarrow \quad 91x < 22 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{22}{91}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $x < \frac{22}{91}$.

b) $\frac{x}{x-3} + \frac{x+3}{x} > 2 \quad (*)$

Điều kiện : $x \neq 0$ và $x \neq 3$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x^2}{x(x-3)} + \frac{x^2-9}{x(x-3)} - \frac{2x(x-3)}{x(x-3)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x-9}{x(x-3)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x - 9 > 0 \text{ và } x(x-3) > 0 \\ 6x - 9 < 0 \text{ và } x(x-3) < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{3}{2} \text{ và } \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 0 \text{ (loại)} \end{array}\right. \\ x < \frac{3}{2} \text{ và } \left[\begin{array}{l} 0 < x < 3 \\ x < 0;\ x < 3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ 0 < x < \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 3$ hoặc $0 < x < \frac{3}{2}$.

Bài 128.

a) $mx + 3 \leq 2x + m \quad \Leftrightarrow \quad (m-2)x \leq m - 3 \qquad (1)$

Biện luận : + Nếu m > 2 : (1) $\Leftrightarrow$ $x \le \frac{m-3}{m-2}$

+ Nếu m = 2 : (1) $\Leftrightarrow$ $0x \le -1$ (vô nghiệm).

+ Nếu m < 2 : (1) $\Leftrightarrow$ $x \ge \frac{m-3}{m-2}$.

b) $x + \frac{x-1}{n} > \frac{x+1}{n} - (n+1)x$ (với $n \ne 0$)

$\Leftrightarrow \quad x + (n+1)x > \frac{2}{n} \quad \Leftrightarrow \quad (2+n)x > \frac{2}{n}$

Biện luận :

+ Nếu 2 + n > 0 hay n > −2 thì : (1) $\Leftrightarrow$ $x > \frac{2}{n(n+2)}$

+ Nếu 2 + n < 0 hay n < −2 thì : (1) $\Leftrightarrow$ $x < \frac{2}{n(n+2)}$

+ Nếu n = −2 thì $0x > -1 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$.

Bài 129. $\begin{cases} 4x+1 \ge 3x+7 \\ 4x+5 > 2x+21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 6 \\ 2x > 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 6 \\ x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow x > 8$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là x > 8.

Bài 130. $\begin{cases} 3x+5 \ge x-1 \\ (x+2)^2 \le (x-1)^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge -6 \\ x^2 + 4x + 4 \le x^2 - 2x + 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ 6x \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x \le 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -3 \le x \le 1$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $-3 \le x \le 1$.

III. Dấu của nhị thức bậc nhất

Bài 131.

a) Bảng xét dấu :

x	−∞		$-\frac{5}{2}$		3		+∞
x − 3		−	|	−	0	+	
2x + 5		−	0	+	|	+	
(x − 3)(2x + 5)		+	0	−	0	+	

Vậy : $(x-3)(2x-5) > 0 \iff \left[\begin{array}{l} x < \frac{5}{2} \\ x > 3 \end{array}\right.$

b) $|3x+4| \le 5 \iff -5 \le 3x+4 \le 5 \iff -9 \le 3x \le 1$

$$\iff -3 \le x \le \frac{1}{3}$$

c) $|2x-1| \le x+3$

- Nếu $x+3 < 0$ hay $x < -3$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $x+3 \ge 0$ hay $x \ge -3$ thì :

$|2x-1| \le x+3 \iff -x-3 \le 2x-1 \le x+3$

$$\iff \begin{cases} x \le 4 \\ 3x \ge -2 \end{cases} \iff -\frac{2}{3} \le x \le 4.$$

Bài 132.

a) Bảng xét dấu f(x) :

x	$-\infty$		-4		-3		2		$+\infty$
$x+3$		−		−	0	+		+	
$x-2$		−		−		−	0	+	
$x+4$		−	0	+		+		+	
$f(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

b) Bảng xét dấu g(x) :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		−		−	0	+	
$x+3$		−	0	+		+	
$g(x)$		+	0	−	0	+	

c) $h(x) = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{2x+4-3x+3}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{-x+7}{(x-1)(x+2)}$

Bảng xét dấu h(x) :

x	$-\infty$		-2		1		7		$+\infty$
$-x+7$		+		+		+	0	−	
$x-1$		−		−	0	+		+	
$x+2$		−	0	+		+		+	
$h(x)$		+	‖	−	‖	+	0	−	

Bài 133.

a) $\dfrac{5}{3-x} < 2$ Điều kiện : $x \neq 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{3-x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{3-x} < 0$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x-1}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.

b) $\dfrac{x^2+x-7}{x^2-9} > 1$ ĐK : $x \neq \pm 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-7}{x^2-9} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{(x+3)(x-3)} > 0$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-3		-2		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+2}{(x+3)(x-3)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là :

$$S = (-3; -2) \cup (3; +\infty).$$

Bài 134.

a) $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+3} > 0$ ĐK : $x \neq 2$; $x \neq -3$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{(x-2)(x+3)} > 0$ (*)

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x + 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
VT của (*)		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là :

$$S = \left(-3; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty).$$

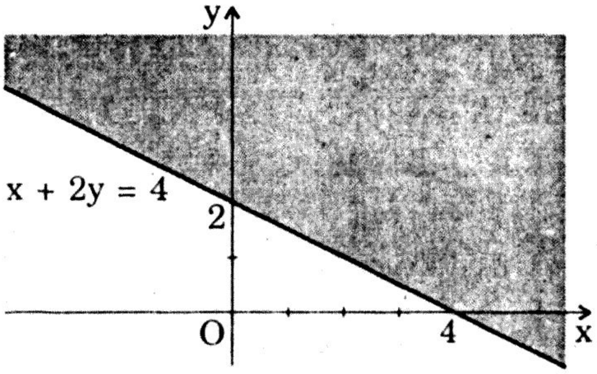
b) $|2x - 3| > -1$

Vì $|2x - 3| \geq 0$ với $\forall x$ nên $|2x - 3| > -1$ với $\forall x$.

Tập nghiệm của bất phương trình là : $(-\infty; +\infty)$.

IV. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài 135. Vẽ đường thẳng $(\Delta) : x + 2y = 4$.



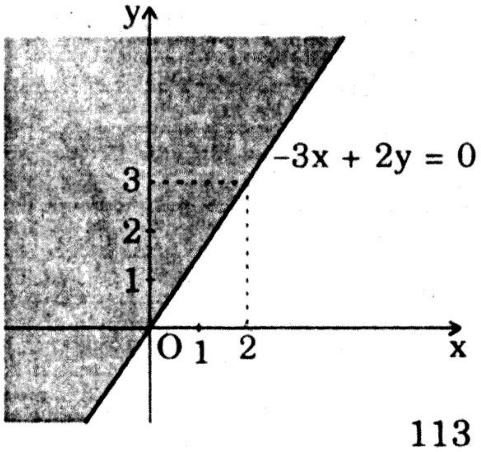
Ta thấy $c = 4 > 0$ nên miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng bờ (Δ) chứa gốc tọa độ (phần mặt phẳng không bị tô đậm kể cả bờ).

Bài 136. Vẽ đường thẳng $(\Delta) : -3x + 2y = 0$

Lấy điểm $M_0(2; 0)$ ta có :

$$-2.2 + 2.0 = -4 < 0 = c$$

Vậy nghiệm của phương trình là nửa mặt phẳng bờ (Δ) chứa điểm $M_0(2; 0)$ (phần mặt phẳng không bị tô đậm không kể bờ).

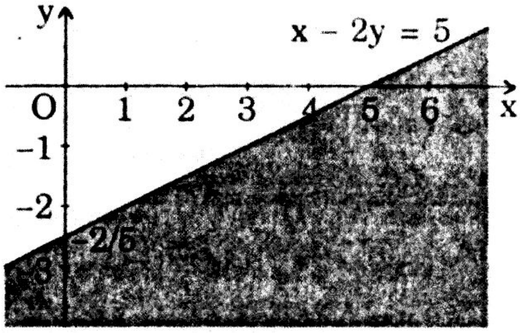


Bài 137. $-x + 3 - 2(y + 1) < 2(3 - x)$

$\Leftrightarrow \quad -x + 3 - 2y - 2 < 6 - 2x$

$\Leftrightarrow \quad x - 2y < 5$

Vẽ đường thẳng (Δ) : $x - 2y = 5$.

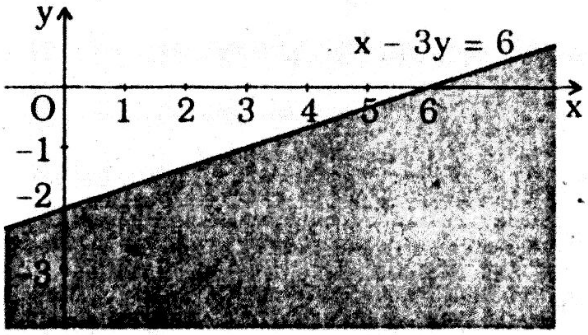


Ta thấy $c = 5 > 0$ nên miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ (Δ) chứa gốc tọa độ (phần mặt phẳng không bị tô đậm không kể bờ).

Bài 138. $2x - 3(y + 2) \le x \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3y - 6 \le x$

$\Leftrightarrow \quad x - 3y \le 6$

Vẽ đường thẳng (Δ) : $x - 3y = 6$



Ta thấy $c = 6 > 0$ nên miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ (Δ) chứa gốc tọa độ (phần mặt phẳng không bị tô đậm kể cả bờ).

V. Dấu của tam thức bậc hai

Bài 139.

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

- *Cách 1 :* $f(x) = 2(x - 1)\left(x + \dfrac{5}{2}\right)$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{5}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- *Cách 2* : Tam thức $2x^2 + 3x - 5$ có :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 40 = 49 > 0$$

Hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = -\frac{5}{2}$

$a = 2 > 0$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $f(x) = -4x^2 + 4x + 3$

Tam thức $-4x^2 + 4x + 3$ có :

$$\Delta' = 4 + 12 = 16 > 0$$

Hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{2}$ a và $x_2 = \frac{3}{2}$

$a = -4 < 0$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x) = -4x^2 + 4x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Bài 140. Tương tự bài 139.

Bài 141. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 1}$ xác định khi $x \neq 1$ và $x \neq -1$.

Tam thức $x^2 + 5x + 6$ có hai nghiệm là $x_1 = 2$ và $x_2 = 3$.

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
$x^2 + 5x + 6$		+	|	+	|	+	0	−	0	+	
$x^2 - 1$		+	0	−	0	+	|	+	|	+	
f(x)		+	‖	−	‖	+	0	−	0	+	

Bài 142. $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 7x + 10}$ xác định khi $x \neq 2$ và $x \neq -5$.

Các tam thức $x^2 - 7x + 10$ và $x^2 + 7x + 10$ có các nghiệm viết theo thứ tự tăng dần là : –5; –2; 2; 5.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-5		-2		2		5		$+\infty$
$x^2 - 7x + 10$		+	|	+	|	+	0	−	0	+	
$x^2 + 7x + 10$		+	0	−	0	+	|	+	|	+	
f(x)		+	‖	−	‖	+	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu, bất phương trình đã cho có tập nghiệm là :

$$(-\infty; -5) \cup (-2; 2] \cup [5; +\infty).$$

Bài 143.

a) Khi m = –1, phương trình trở thành $3x - 2 = 0$ có nghiệm $x = \dfrac{2}{3}$.

Khi $m \neq -1$, phương trình : $(m + 1)x^2 + 3x + m - 1 = 0$ vô nghiệm khi :

$$\Delta = 9 - 4(m + 1)(m - 1) < 0 \Leftrightarrow 9 - 4(m^2 - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 13 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{\sqrt{13}}{2} \text{ hoặc } m > \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Vậy với $m < -\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ hoặc $m > \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Khi m = 3, phương trình trở thành $-6x + 5 = 0$ có nghiệm $x = -\dfrac{5}{6}$.

Khi $m \neq 3$, phương trình : $(-m + 3)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0$ vô nghiệm khi : $\Delta' = (m + 3)^2 - (-m + 3)(m + 2) < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 + m^2 - m - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 5m + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{2} < m < -1$$

Vậy với $-\dfrac{3}{2} < m < -1$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Chương 5. THỐNG KÊ

Dạng 1. Bảng phân bố tần số và tần suất

Bài 144. Bảng phân bố tần số và tần suất như sau :

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
60	2	25
64	3	37,5
68	3	37,5
Cộng	8	100(%)

Bài 145.

a) Số các giá trị khác nhau của dấu hiện là 4.

b) Bảng phân bố tần số và tần suất :

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
1	9	30
2	13	43,3
3	5	16,7
4	3	10
Cộng	30	100(%)

c) Số các gia đình có từ 1 đến 2 con chiếm tỉ lệ :

22 : 30 = 0,733 = 73,3%.

Bài 146.

a) Bảng phân bố tần số và tần suất ;

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
48	3	10
49	8	26,7
50	15	50
51	4	13,3
Cộng	30	100(%)

b) Số gói chè có khối lượng từ 49 gam đến 50 gam chiếm tỉ lệ :

236,7% + 50% = 76,7%.

Bài 147.

a) Bảng phân bố tần số và tần suất :

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
40	8	26,7
41	4	13,3
42	10	33,3
44	5	16,7
45	3	10
Cộng	30	100(%)

b) Số công nhân hoàn thành sản phẩm từ 40 phút đến 42 phút chiếm tỉ lệ : 236,7% + 13,3% + 33,3% = 73,3%.

Bài 148.

a) Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp :

Lớp số đo chiều cao (cm)	Tần số	Tần suất (%)
[158 – 161)	17	42,5
[161 – 164)	10	25
[164 – 166]	13	32,5
Cộng	40	100(%)

b) Những học sinh có chiều cao từ 161cm đến 163cm chiếm tỉ lệ 25%.

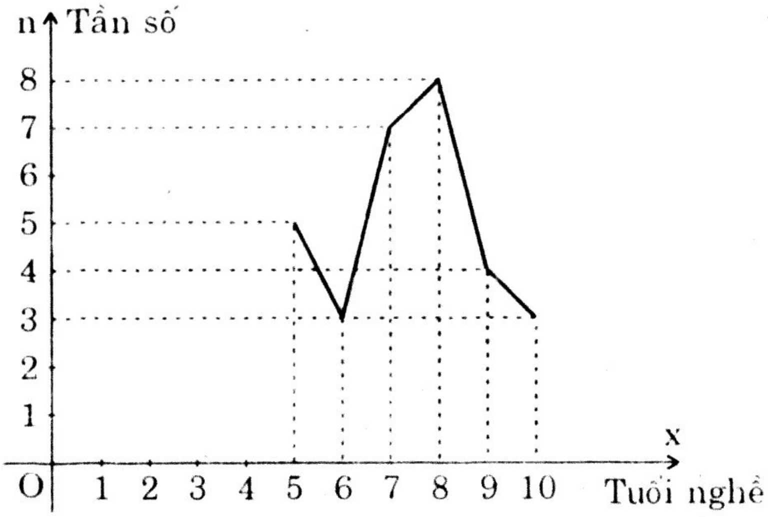
Dạng 2. Biểu đồ

Bài 149.

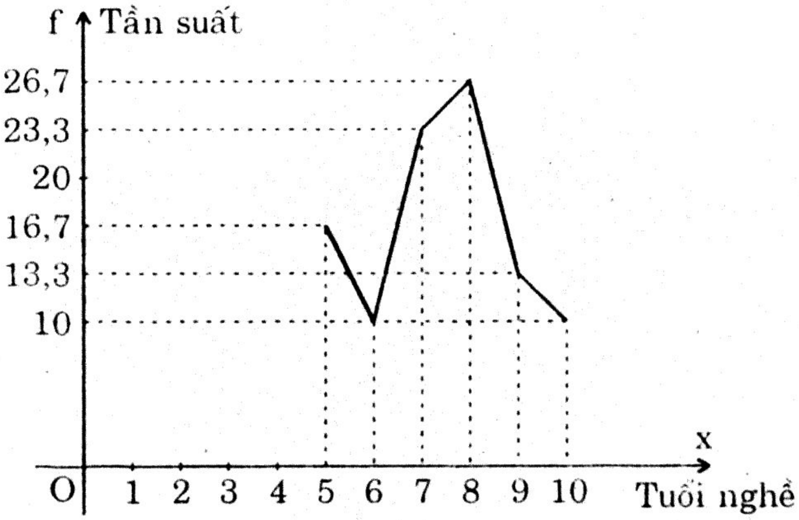
a) Bảng phân bố tần số và tần suất :

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
5	5	16,7
6	3	10
7	7	23,3
8	8	26,7
9	4	13,3
10	3	10
Cộng	30	100(%)

b) Biểu đồ đường gấp khúc tần số :

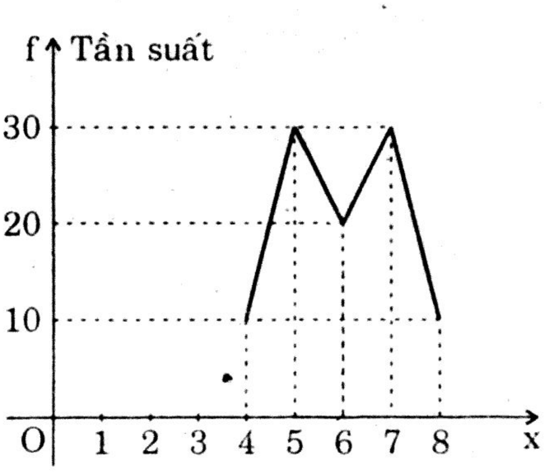


c) Biểu đồ đường gấp khúc tần suất :

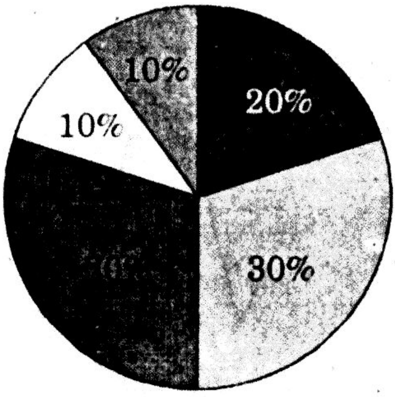


Bài 150.

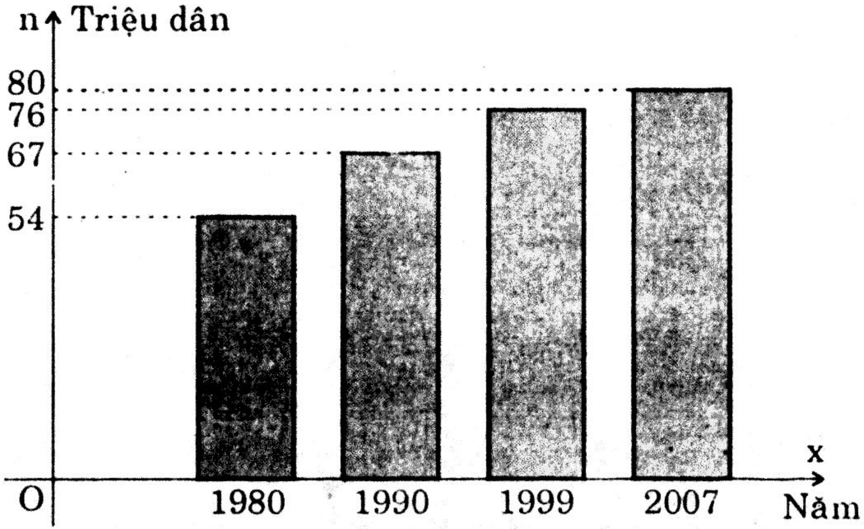
a) Biểu đồ đường gấp khúc tần suất :



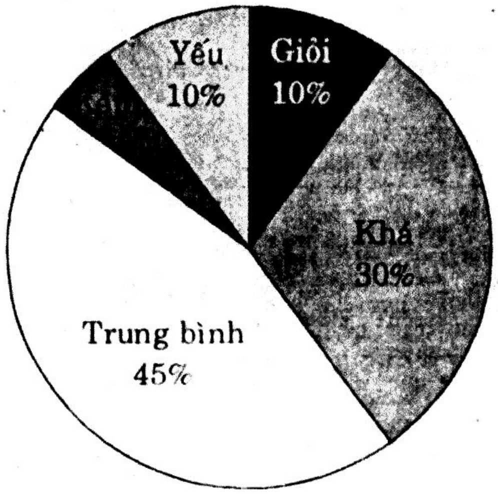
b) Biểu đồ hình quạt tần suất :



Bài 151.



Bài 152. Biểu đồ hình quạt biểu diễn kết quả phân loại học tập của học sinh khối lớp 10 :



Dạng 3. Số trung bình cộng – Số trung vị – Mốt

Bài 153.

a) $$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + x_4n_4 + x_5n_5 + x_6n_6}{n}$$

$$= \frac{5.4 + 6.7 + 7.2 + 8.1 + 9.2 + 10.2}{18} = 6{,}78.$$

b) $M_0 = 6$.

Bài 154.

a) Bảng phân bố tần số và tần suất :

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
44	1	20
46	1	20
48	2	40
50	1	20
Cộng	5	100(%)

b) $$\overline{X} = \frac{44 + 46 + 48.2 + 50}{5} = 47{,}2.$$

Bài 155.

a) $$\overline{X} = \frac{1.5 + 3.7 + 5.5 + 99.2 + 2009.1}{20} = 112{,}9.$$

b) Giá trị trung bình không thể là đại diện cho dấu hiệu.

c) Số trung vị : $M_e = 5$.

Bài 156.

$$\overline{X} = f_1c_1 + f_2c_2 + f_3c_3 + f_4c_4$$

$$= \frac{10}{100}.21 + \frac{15}{100}.23 + \frac{50}{100}.25 + \frac{25}{100}.27 = 24{,}8.$$

Bài 157.

a) Bảng phân bố tần số và tần suất :

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
0	5	10
1	13	26
2	22	44
3	7	14
4	3	6
Cộng	50	100(%)

b) Số gia đình có từ 0 đến 2 con chiếm tỉ lệ 80%, chiếm tỉ lệ thấp nhất 6% là những gia đình có 4 con, chiếm tỉ lệ cao nhất 44% là những gia đình có 2 con.

c) $M_e = 2$; $M_0 = 2$.

Dạng 4. Phương sai và độ lệch chuẩn

Bài 158. Ta có bảng :

Điểm Toán 10A	Tần số	x_in_i	$n_ix_i^2$	δ_x^2
4	2	8	32	$\delta_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$ $= 51,6 - (7,05)^2$ $= 1,8975$ $\Rightarrow \delta_x = \sqrt{1,8975} = 1,38$
5	5	25	125	
6	4	24	144	
7	12	84	588	
8	13	104	832	
9	3	27	243	
10	1	10	100	
Cộng	40	282	2064	
$\overline{x} = \frac{282}{40} = 7,05$		$\overline{x^2} = \frac{2064}{40} = 51,6$		

Tương tự ta tìm được số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn về điểm thi môn Toán của lớp 10B.

$$\overline{y} = 7{,}05\ ; \qquad \overline{y^2} = \frac{2052}{40} = 51{,}3$$

$$\delta_y^2 = \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = 51{,}3 - (7{,}05)^2 = 1{,}5975$$

$$\Rightarrow \quad \delta_y = \sqrt{1{,}5975} \approx 1{,}26.$$

b) Vì $\delta_y < \delta_x$ nên bài thi môn Toán lớp 10B đồng đều hơn bài thi môn Toán lớp 10A.

Bài 159.

Ta có bảng (nhóm cá thứ nhất) :

Lớp khối lượng (kg)	Giá trị đại diện c_i	Tần số	n_ic_i	$n_ic_i^2$
[0,8; 1)	0,9	6	5,4	4,86
[1; 1,2)	1,1	8	8,8	9,68
[1,2; 1,4)	1,3	8	10,4	13,52
[1,4; 1,6)	1,5	7	10,5	15,75
[1,6; 1,8]	1,7	1	1,7	2,89
Cộng		30	36,8	46,7

$$\overline{x} = \frac{36{,}8}{30} = 1{,}23\,(\text{kg})$$

$$\overline{x^2} = \frac{46{,}7}{30} = 1{,}56$$

$$\delta_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 1{,}56 - (1{,}23)^2 = 0{,}047.$$

Ta có bảng (nhóm cá thứ hai) :

Lớp khối lượng (kg)	Giá trị đại diện c_i	Tần số	n_ic_i	$n_ic_i^2$
[0,8; 1)	0,9	12	10,8	9,72
[1; 1,2)	1,1	2	2,2	2,42
[1,2; 1,4)	1,3	4	5,2	6,76
[1,4; 1,6)	1,5	9	13,5	20,25
[1,6; 1,8]	1,7	3	5,1	8,67
Cộng		30	36,8	47,82

$$\overline{y} = \frac{36,8}{30} = 1,23\,(kg)$$

$$\overline{y^2} = \frac{47,82}{30} = 1,594$$

$$\delta_y^2 = \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = 1,594 - (1,23)^2 = 0,081.$$

Vì $\delta_x^2 < \delta_y^2$ nên nhóm cá thứ nhất có khối lượng đồng đều hơn nhóm cá thứ hai.

Bài 160.

a) Ta có bảng như sau :

Giá trị x	Tần số	$x_i n_i$	$n_i x_i^2$
10	20	200	2000
12	50	600	7200
14	30	420	5880
15	15	225	3375
16	18	288	4608
17	7	119	2023
20	10	200	4000
Cộng	150	2052	29086

$$\overline{x} = \frac{2052}{150} = 13,68$$

$$\overline{x^2} = \frac{29086}{150} = 193,907$$

$$\delta_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 193,907 - (13,68)^2 = 6,76$$

$$\delta_x = \sqrt{6,76} = 2,6.$$

b) Số trung vị $M_e = 15$.

Bài 161.

a) Ta có bảng :

Lớp thành tích (m)	Giá trị đại diện c_i	Tần số	n_ic_i	$n_ic_i^2$
[2,2; 2,4)	2,3	5	11,5	26,45
[2,4; 2,6)	2,5	12	30	75
[2,6; 2,8)	2,7	20	54	145,8
[2,8; 3,0]	2,9	3	8,7	25,23
Cộng		40	104,2	272,48

$$\overline{x} = \frac{104,2}{40} = 2,605$$

$$\overline{x^2} = \frac{272,48}{40} = 6,812$$

$$\delta_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 6,812 - (2,605)^2 = 0,025$$

$$\delta_x = \sqrt{0,025} = 0,158.$$

b) Thành tích lớp 10B có số trung bình cộng là $\overline{y} = 2,605 = \overline{x}$ nhưng có phương sai $\delta_y^2 = 0,3 > \delta_x^2 = 0,025$. Bởi vậy thành tích nhảy xa của lớp 10A đồng đều hơn.

Bài 162.

a) Ta có bảng phân bố tần suất ghép lớp như sau :

Lớp khối lượng (kg)	Tần số	Tần suất (%)
[50; 60)	15	15
[60; 70)	25	25
[70; 80)	35	35
[80; 90)	10	10
[90; 100] .	15	15
Cộng	100	100(%)

b) Số lợn khi xuất chuồng có khối lượng từ 70kg trở lên chiếm 60%.

c) Ta có bảng :

Lớp khối lượng (kg)	Giá trị đại diện c_i	Tần số	n_ic_i	$n_ic_i^2$
[50; 60)	55	15	825	45375
[60; 70)	65	25	1625	105625
[70; 80)	76	35	2625	196875
[80; 90)	85	10	850	72250
[90; 100]	95	15	1425	135375
Cộng		100	7350	555500

$$\overline{x} = \frac{7350}{100} = 73,5$$

$$\overline{x^2} = \frac{555500}{100} = 5555$$

$$\delta_x^2 = 5555 - (73,5)^2 = 152,75$$

$$\delta_x = \sqrt{152,75} = 12,36.$$

Chương 6. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC
CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Dạng 1. Cung và góc lượng giác

Bài 163.

a) $20^\circ = \frac{\pi}{9}\text{rad} = 0{,}3489\text{rad}$

b) $55^\circ = \frac{11\pi}{36}\text{rad} = 0{,}959\text{rad}$

c) $-35^\circ = -\frac{7\pi}{36}\text{rad} = -0{,}61\text{rad}$

d) $-125^\circ 30' = -2{,}1899\text{rad}$.

Bài 164.

a) $\frac{\pi}{36} = 5^\circ$

b) $\frac{3\pi}{16} = 33^\circ 45'$

c) $\frac{2\pi}{9} = 40^\circ$

d) $\frac{-3}{4} = -42^\circ 58' 19''$.

Bài 165. Ta có cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $l = R.\alpha$ hoặc $l = \frac{\pi R a}{180}$.

a) Với $\alpha = \frac{\pi}{10}$ thì độ dài cung tròn là :

$$l = 15.\frac{\pi}{10} = 1{,}5\pi = 4{,}712\,(\text{cm}).$$

b) Với $\alpha = 0{,}5$ thì độ dài cung tròn là :

$$l = 15.0{,}5 = 7{,}5\ (\text{cm}).$$

c) Với $a = 35^\circ$ thì độ dài cung tròn là :

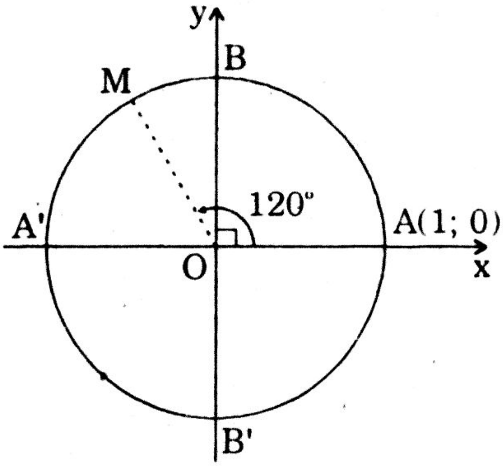
$$l = \frac{\pi R a}{180} = \frac{\pi.15.35}{180} = 9{,}1629\,(\text{cm}).$$

Bài 166.

a) a = 120°

$sđ\overset{\frown}{AM} = 120° = 90° + 30°$

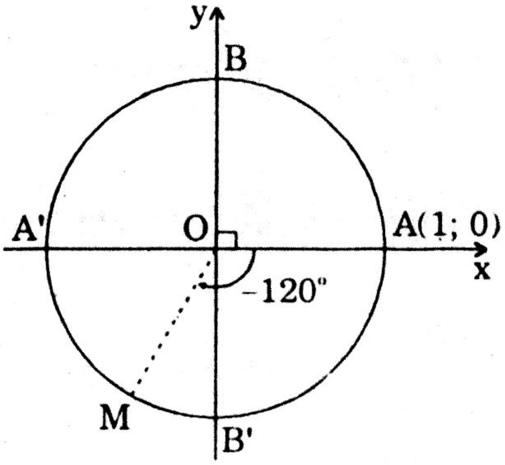
Điểm cuối M của cung 120° thuộc cung hình học $\overset{\frown}{A'B}$ sao cho $\overset{\frown}{BM} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{BA'}$.



b) a = −120°

$sđ\overset{\frown}{AM} = -120° = -(90° + 30°)$

Điểm cuối M của cung $\overset{\frown}{AM}$ thuộc cung hình học $\overset{\frown}{B'A'}$ sao cho $\overset{\frown}{B'M} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{B'A'}$.



c) $\alpha = \frac{-3\pi}{4}$

$$sđ\overset{\frown}{AM} = \frac{-3\pi}{4} = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Điểm cuối M của cung $\frac{-3\pi}{4}$ là trung điểm của cung hình học $\overset{\frown}{B'A'}$.

d) $\alpha = \frac{7\pi}{3}$

$sđ\overset{\frown}{AM} = \frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$

Điểm cuối M của cung $\frac{7\pi}{3}$ thuộc cung hình học $\overset{\frown}{AB}$ sao cho $\overset{\frown}{AM} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{AB}$.

Bài 167.

a) $sđ\overset{\frown}{AN} = \frac{k\pi}{4}$

- Khi k = 0 thì $sđ\overset{\frown}{AN} = 0$ nên điểm N trùng với điểm A.
- Khi k = 1 thì $sđ\overset{\frown}{AN} = \frac{\pi}{4}$ nên điểm cuối N trùng với điểm $N_1 \in \overset{\frown}{AB}$ sao cho $\overset{\frown}{BN_1} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.
- Khi k = 2 thì $sđ\overset{\frown}{AN} = \frac{\pi}{2}$ nên điểm cuối N trùng với điểm B.
- Tương tự khi k = 3 thì $sđ\overset{\frown}{AN} = \frac{3\pi}{4}$ nên điểm cuối N trùng với điểm $N_2 \in \overset{\frown}{BA'}$ sao cho $\overset{\frown}{BN_2} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BA'}$.
- Khi k = 4 thì điểm cuối N trùng với điểm A'.
- Khi n = 5 thì điểm cuối trùng với điểm $N_3 \in \overset{\frown}{B'A'}$ sao cho $\overset{\frown}{B'N_3} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A'B'}$.
- Khi k = 6 thì điểm cuối N trùng với điểm B'.

- Khi k = 7 thì điểm cuối N trùng với điểm $N_4 \in \overset{\frown}{B'A}$ sao cho $\overset{\frown}{B'N_4} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{B'A}$.

- Khi k = 8 thì điểm cuối N trùng với điểm A.

Vậy điểm cuối N của $\overset{\frown}{AN}$ có số đo $\frac{k\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$ là các điểm A, N_1, B, N_2, A', N_3, B', N_4 thuộc đường tròn lượng giác.

b) Tương tự câu a).

Dạng 2. Giá trị lượng giác của một cung

Bài 168. Ta có : $-1 \le \cos\alpha \le 1$

Vì $\sqrt{3} > 1$; $-\frac{4}{3} < -1$; $-1,1 < 1$

Nên các giá trị này không có cùng α.

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{hoặc } \alpha = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 169.

a) $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$

$$\Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{1}{(-0,5)^2} - 1 = \frac{1}{0,25} - 1$$

$$\Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{0,75}{0,25} = 3$$

$$\Rightarrow \cot\alpha = \pm\sqrt{3}.$$

b) Ta có : $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 170.

a) Ta có : $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+8} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{3}.$$

b) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Bài 171. Với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì :

a) $\sin(\alpha - \pi) = \sin[-(\pi - \alpha)] = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin\alpha < 0$

b) $\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha < 0.$

Bài 172.

a) $\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ thì $\cos\alpha > 0$

Từ hệ thức : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{21}{25} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{5} : \dfrac{\sqrt{21}}{5} = \dfrac{2}{\sqrt{21}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{21}$

- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{21}}{5} : \dfrac{2}{5} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}.$

b) $\cos\alpha = -0{,}5$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin\alpha > 0$

Ta có : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{0{,}75} = 0{,}5\sqrt{3}$

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}5\sqrt{3}}{-0{,}5} = -\sqrt{3}$

- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

c) $\tan\alpha = 1$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì $\cos\alpha > 0$; $\sin\alpha > 0$

Ta có : $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{1} = 1.$

d) $\cot\alpha = -2$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ thì $\sin\alpha < 0$ và $\cos\alpha > 0$

Ta có : $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha = 1 + 4 = 5$

$\Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

- $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

- $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}.$

Bài 173.

a) $\sin\alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$

b) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$

c) $\sin\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$

và $\alpha = \dfrac{4\pi}{3} + l2\pi \quad (l \in \mathbf{Z}).$

d) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$

Bài 174.

a) Ta có : $\sin(270^\circ + \alpha) = \sin[360^\circ - (90^\circ - \alpha)]$

$= -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \qquad (1)$

$\sin(270^\circ - \alpha) = \sin[360^\circ - (90^\circ + \alpha)]$

$= -\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos\alpha \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra : $\sin(270^\circ + \alpha) = \sin(270^\circ - \alpha).$

b) $\cos(270^\circ + \alpha) = \cos[360^\circ - (90^\circ - \alpha)]$

$= \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \qquad (3)$

$$\cos(270^\circ - \alpha) = \cos[360^\circ - (90^\circ + \alpha)]$$
$$= \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra : $\cos(270^\circ + \alpha) = -\cos(270^\circ - \alpha)$.

Bài 175. Với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì $\sin\alpha > 0$ và $\cos\alpha > 0$

Suy ra $\sin\alpha + \cos\alpha > 0$ và $\sin\alpha.\cos\alpha > 0$

Do đó : $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$
$$= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha > 1$$

Suy ra : $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

Bài 176.

a) Ta có : $\dfrac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)}$

$$= \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} \qquad (1)$$

$$\frac{\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1}$.

b) Ta có : $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$

$$= (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3$$
$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha)$$
$$= \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Dạng 3. Công thức lượng giác

Bài 177.

a) • $\sin25^\circ = \sin(-135^\circ + 360^\circ) = \sin(-135^\circ) = -\sin135^\circ$

$$= -\sin(180^\circ - 45^\circ) = -\sin45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

- $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$
- $\cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$.

b)
- $\sin\dfrac{5\pi}{2} = \sin\left(\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\sin\dfrac{3\pi}{2} = -\sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$
- $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan\dfrac{2\pi}{3} = \tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$
- $\cot\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\cot\dfrac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$.

Bài 178.

a) Ta có : $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \quad \cos\alpha > 0; \quad \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\alpha.\cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha.\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

b) Ta có : $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \quad \sin\alpha > 0; \quad \cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Do đó : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \dfrac{-1}{2} = -\sqrt{3}$

Suy ra $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{-\sqrt{3} - 1}{1 + (-\sqrt{3}).1}$

$$= \frac{-(1 + \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}} = \frac{-(1 + \sqrt{3})^2}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

c) Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha > 0$ và $\cos\alpha = \frac{2}{5}$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Vì $90^\circ < \beta < 180^\circ \Rightarrow \cos\beta < 0$ và $\sin\beta = \frac{3}{5}$

$$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = -\frac{4}{5}$$

Vậy $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{2}{5}.\frac{-4}{5} - \frac{\sqrt{21}}{5}.\frac{3}{5} = \frac{-8}{25} - \frac{3\sqrt{21}}{25}$$

$$= \frac{-(8 + 3\sqrt{21})}{25}$$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$= \frac{\sqrt{21}}{5}.\frac{-4}{5} - \frac{2}{5}.\frac{3}{5} = \frac{-4\sqrt{21}}{25} - \frac{6}{25}$$

$$= \frac{-(4\sqrt{21} + 6)}{25}.$$

Bài 179.

a) Ta có : $\sin\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\sqrt{2}}{2} : \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2.\frac{(-\sqrt{2})}{2}.\frac{(-\sqrt{2})}{2} = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

Do $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ mà $\cos 2\alpha = 0$ nên không xác định được $\tan 2\alpha$.

b) Ta có : $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha > 0$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2.\frac{12}{13}.\frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = \frac{-119}{169}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{120}{169} : \frac{-119}{169} = \frac{-120}{119}.$$

Bài 180.

a) $1 - \cos\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos 2.\frac{\alpha}{2}$

$$= \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

b) $1 + \cos\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos 2.\frac{\alpha}{2}$

$$= \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

c) $1 - 2\cos\alpha = 2\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\alpha\right)$

$$= -2\sin\frac{60^\circ + \alpha}{2}\sin\frac{60^\circ - \alpha}{2}.$$

d) $1 + 2\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2} + \sin\alpha\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\alpha\right)$

$$= 2\cos\frac{30^\circ + \alpha}{2}\sin\frac{30^\circ - \alpha}{2}.$$

Bài 181.

a) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$= \sin\alpha\cos\beta.$$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\alpha - \beta)$

$= \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

Bài 182.

a) Ta có : $\cos20^\circ = \sin70^\circ$

$\cos40^\circ = \sin50^\circ$

$\cos80^\circ = \sin10^\circ$

Do đó : $\cos20^\circ.\cos40^\circ.\cos80^\circ = \sin70^\circ.\sin50^\circ.\sin10^\circ$

$$= \sin10^\circ.\sin50^\circ.\sin70^\circ.$$

b) Ta có : $\sqrt{2}.\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.\left[\sin\alpha.\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha.\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$$= \sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}.\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right) = \sin\alpha + \cos$$

Vậy $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$

Bài 183.

a) Vì $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos\alpha < 0$

Nên $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2.\frac{1}{5}.\frac{-2\sqrt{6}}{5} = \frac{-4\sqrt{6}}{25}$$

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{24}{25} - \frac{1}{25} = \frac{23}{25}$$

$$\tan2\alpha = \frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha} = \frac{-4\sqrt{6}}{25} : \frac{23}{25} = \frac{-4\sqrt{6}}{23}$$

$$\cot2\alpha = \frac{1}{\tan2\alpha} = \frac{-23}{4\sqrt{6}}.$$

b) Tương tự câu a).

Bài 184.

a) $$M = \frac{\cos\alpha + \cos3\alpha + \cos5\alpha}{\sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha} = \frac{2\cos3\alpha\cos2\alpha + \cos3\alpha}{2\sin3\alpha\cos2\alpha + \sin3\alpha}$$

$$= \frac{\cos3\alpha(2\cos2\alpha + 1)}{\sin3\alpha(2\cos2\alpha + 1)} = \frac{\cos3\alpha}{\sin3\alpha} = \cot3\alpha.$$

b) $$\frac{\sin3\alpha - \sin5\alpha}{2\cos4\alpha} = \frac{2\cos4\alpha.\sin(-\alpha)}{2\cos4\alpha} = -\sin\alpha.$$

Bài 185. Ta có : $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sqrt{2}\cos\alpha$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha$$

$$= \sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha = 0.$$

Bài 186. $$A = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$= -\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{do } \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}).$$

Bài 187. Kết quả B = 1.

MỤC LỤC

Lời giới thiệu 3

Chương 1. **MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP**

Dạng 1. Mệnh đề – Mệnh đề chứa biến 5

Dạng 2. Các phép toán về mệnh đề 6

Dạng 3. Các phép toán chứng minh 9

Dạng 4. Tập hợp – Các phép toán trên tập hợp 11

Dạng 5. Các tập hợp số 13

Dạng 6. Số gần đúng – Sai số 15

Dạng 7. Tổng hợp 17

Chương 2. **HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI**

Dạng 1. Hàm số – Đồ thị – Tính chẵn, lẻ 19

Dạng 2. Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ 22

Dạng 3. Hàm số bậc hai 24

Dạng 4. Tổng hợp 27

Chương 3. **PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH**

Dạng 1. Một số phương pháp giải phương trình 29

Dạng 2. Một số phương pháp giải phương trình bậc nhất hai ẩn ..32

Dạng 3. Hệ phương trình 34

Chương 4. **BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH**

I. Bất đẳng thức 39

II. Bất phương trình và hệ bất phương trình một ẩn 41

III. Dấu của nhị thức bậc nhất 43

IV. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn 44

V. Dấu của tam thức bậc hai 45

Chương 5. THỐNG KÊ

Dạng 1. Bảng phân bố tần số và tần suất 47
Dạng 2. Biểu đồ 49
Dạng 3. Số trung bình cộng – Số trung vị – Mốt 53
Dạng 4. Phương sai và độ lệch chuẩn 55

Chương 6. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Dạng 1. Cung và góc lượng giác 59
Dạng 2. Giá trị lượng giác của một cung 61
Dạng 3. Công thức lượng giác 65

BÀI GIẢI

Chương 1. MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

Dạng 1. Mệnh đề – Mệnh đề chứa biến 68
Dạng 2. Các phép toán về mệnh đề 69
Dạng 3. Các phép toán chứng minh 71
Dạng 4. Tập hợp – Các phép toán trên tập hợp 73
Dạng 5. Các tập hợp số 75
Dạng 6. Số gần đúng – Sai số 75
Dạng 7. Tổng hợp 77

Chương 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

Dạng 1. Hàm số – Đồ thị – Tính chẵn, lẻ 78
Dạng 2. Hàm số bậc nhất y = ax + b (a ≠ 0) 83
Dạng 3. Hàm số bậc hai 86
Dạng 4. Tổng hợp 90

Chương 3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dạng 1. Một số phương pháp giải phương trình 94
Dạng 2. Một số phương pháp giải phương trình bậc nhất hai ẩn 98
Dạng 3. Hệ phương trình 100

Chương 4. BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. Bất đẳng thức 106
II. Bất phương trình và hệ bất phương trình một ẩn 108
III. Dấu của nhị thức bậc nhất 110
IV. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn 113
V. Dấu của tam thức bậc hai...114

Chương 5. THỐNG KÊ

Dạng 1. Bảng phân bố tần số và tần suất....................................117
Dạng 2. Biểu đồ 118
Dạng 3. Số trung bình cộng – Số trung vị – Mốt.........................121
Dạng 4. Phương sai và độ lệch chuẩn 122

Chương 6. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Dạng 1. Cung và góc lượng giác 127
Dạng 2. Giá trị lượng giác của một cung 130
Dạng 3. Công thức lượng giác...134

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: MINH KHAI

Trình bày bìa: NHÀ SÁCH SAO MAI

Đối tác liên kết xuất bản:
NHÀ SÁCH SAO MAI

SÁCH LIÊN KẾT

Phân loại và phương pháp giải các dạng toán Đại số 10

Mã số: 1L – 1532ĐH2009
In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xí nghiệp In Đường Sắt.
Số xuất bản: 500 – 2009/CXB/07 – 79/ĐHQGHN, ngày 10/6/2009.
Quyết định xuất bản số: 153LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2009.